Konstruktivne metode u geometriji

prema predavanjima profesora Vladimira Voleneca

verzija: 18. svibnja 2020.

Sadržaj

Poglavlje 1

Euklidske konstrukcije

1.1 Povijest

Ravnalo i šestar su najstariji geometrijski instrumenti. Ne zna se gdje su i kada izumljeni, ali je sigurno da su nastali iz potrebe pri gradnjama i premjeravanju zemljišta.

Zahtjev da se za rješavanje neke zadaće koriste samo ta dva instrumenta postavio je još Platon (5-4. st. pr. Kr.). Geometrija ravnala i šestara je dugo bila jedina poznata, a vrhunac te geometrije predstavlja Euklidovo djelo *Elementi*, gdje je ona sistematski obrađena.

Euklid je bio nastavnik u aleksandrijskoj školi oko 300. g. pr. Kr. Elementi se sastoje od 13 knjiga u kojima je sustavno obrađena sva do tada poznata geometrija, osim teorije krivulja drugog stupnja.

Mogućnost izvođenja konstrukcija ravnalom i šestarom opisuje Euklid tzv. aksiomima ravnala i šestara (koje ćemo kasnije upoznati). Zatim Euklid pokazuje kako se rješavaju neke osnovne konstruktivne zadaće.

Međutim, već je starim Grcima postalo jasno da komplet ravnalo – šestar ima ograničene konstruktivne mogućnosti. Tim se kompletom mogu rješavati konstruktivne zadaće koje pri analitičkom rješavanju dovode do linearnih i kvadratnih jednadžbi, a to su tzv. zadaće prvog i drugog stupnja.

Starim Grcima bili su poznati neki problemi, jednostavni po svojoj izreci, koje nisu uspjeli riješiti pomoću ravnala i šestara. Tri najpoznatija problema tog tipa su: duplikacija kocke, trisekcija kuta i kvadratura kruga. U svrhu rješavanja tih problema Grci su koristili neke krivulje (stupnja višeg od 2) kao npr. kvadratrisu i konhoidu i kruvulje drugog reda (elipsu, parabolu i hiperbolu).

Matematičari su stoljećima pokušavali naći elementarna rješenja (tj. rješenja pomoću ravnala i šestara) ovih triju “klasičnih problema”. Tek je krajem 18. i početkom 19. stoljeća dokazano da se ova tri problema ne mogu elementarno riješiti.

1.2 Aksiomi konstruktivne geometrije

Konstruktivna geometrija je dio geometrije koji se bavi geometrijskim konstrukcijama. Mi ćemo se ograničiti samo na konstruktivnu geometriju ravnine.

Osnovni pojam konstruktivne geometrije je *konstrukcija geometrijskog lika*, tj. skupa točaka u ravnini. Taj pojam uzimamo bez definicije. Njegov smisao poznat nam je iz prakse, a u interesu logičke strogosti formulirat ćemo njegova osnovna svojstva, tj. *aksiome* koji ga karakteriziraju.

Aksiomi konstruktivne geometrije su:

A1. Svaki dani lik je konstruiran.
Dakle za neki lik kažemo da je *dan* ako je već konstruiran, tj. nacrtan. Treba razlikovati pojam "dani lik" od pojma "lik određen danim elementima". Primjer drugog pojma je kružnica kojoj je poznato središte i poznat joj je polumjer, ali koja nije nacrtana.

A2. Ako su konstruirana dva ili više likova, onda je konstruirana i njihova unija.

A3. Ako su konstruirana dva lika, može se ustanoviti je li njihova razlika prazan skup ili nije. U slučaju da ta razlika nije prazan skup, ta je razlika konstruirana.

A4. Ako su konstruirana dva ili više likova, može se ustanoviti je li njihov presjek prazan skup ili nije. U slučaju da taj presjek nije prazan skup, taj presjek je konstruiran.

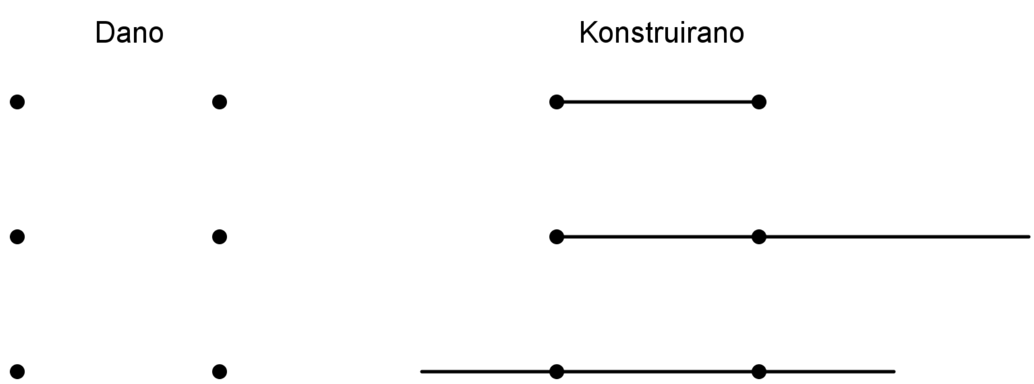
A5. Ako je konstruiran neki neprazan lik, moguće je konstruirati točku koja pripada tom liku.

Ovo su tzv. *opći aksiomi* konstruktivne geometrije. Osim njih, potrebni su nam i tzv. aksiomi instrumenata koji karakteriziraju svojstva pojedinih instrumenata.

Mi ćemo koristiti ravnalo i šestar.

Aksiom ravnala. Ravnalom je moguće:

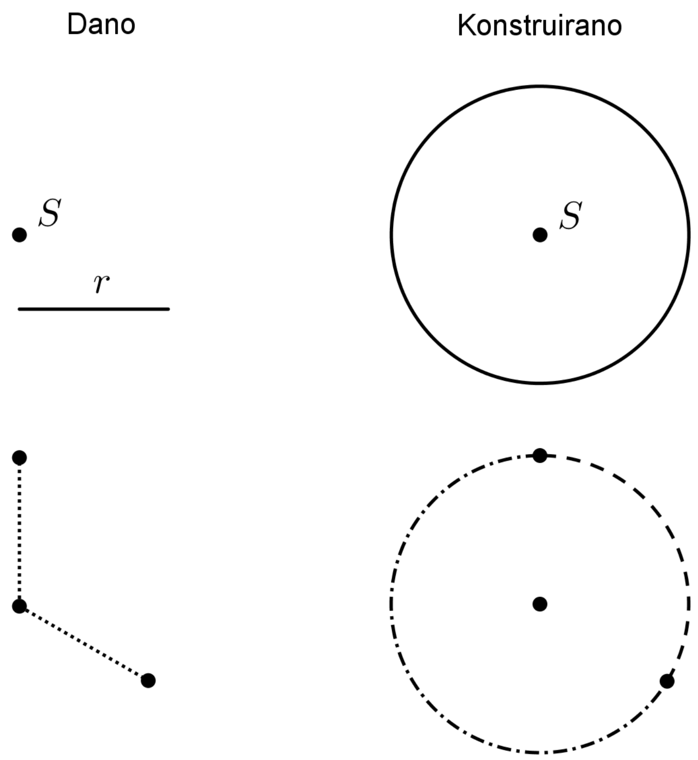
1. konstruirati dužinu ako su dani krajevi te dužine,
2. konstruirati polupravac s danom početnom točkom koji prolazi kroz drugu danu točku,
3. konstruirati pravac kroz dvije dane točke.



Slika 1.1: Aksiom ravnala

Aksiom šestara. Šestarom je moguće:

1. konstruirati kružnicu ako je dano njeno središte i njen polumjer,
2. konstruirati bilo koji od dva luka kružnice određena s dvije točke kružnice ako je dano središte kružnice i krajnje točke tog luka.



Slika 1.2: Aksiom šestara

Navedeni aksiomi omogućavaju da se izvedu tzv. **temeljne konstrukcije**, a to su:

- konstrukcija dužine kojoj su dani krajevi
- konstrukcija polupravca kojem je dana početna točka i još jedna točka
- konstrukcija pravca koji prolazi kroz dvije dane točke
- konstrukcija kružnice kojoj je dano središte i polumjer
- konstrukcija bilo kojeg od dva luka kružnice određenih s dvije točke kružnice ako je dano središte kružnice i krajnje točke tog luka
- konstrukcija konačnog broja zajedničkih točaka dvaju danih likova
- konstrukcija točke koja pripada danom liku

U aksiomu ravnala i aksiomu šestara idealizirali smo situaciju jer smatramo da je ravnalo beskonačno dugačko, šestar ima beskonačno velik otvor i ravnina je neograničena u svim smjerovima. U praksi to nije tako, pa se kasnije možemo pozabaviti i tim problemom.

Napomenimo da je dovoljno zahtijevati drugo svojstvo u aksiomu ravnala i drugo svojstvo u aksiomu šestara, jer ostala svojstva slijede na temelju aksioma A2 i A4.

1.3 Konstruktivna zadaća

Konstruktivna zadaća sastoji se u konstrukciji nekog lika danim instrumentima, ako je dan drugi lik i opisani odnosi između elemenata danog i traženog lika.

Rješenje konstruktivne zadaće je svaki lik koji zadovoljava sve postavljene uvjete.

Naći rješenje znaći svesti danu zadaću na konačan niz temeljnih konstrukcija danim instrumentima, nakon čega smatramo da je traženi lik i sam konstruiran.

Može se dogoditi da konstruktivna zadaća ima više rješenja, tj. da postoji više različitih likova od kojih svaki zadovoljava uvjete zadaće. Ovisno o broju rješenja, zadaća može biti:

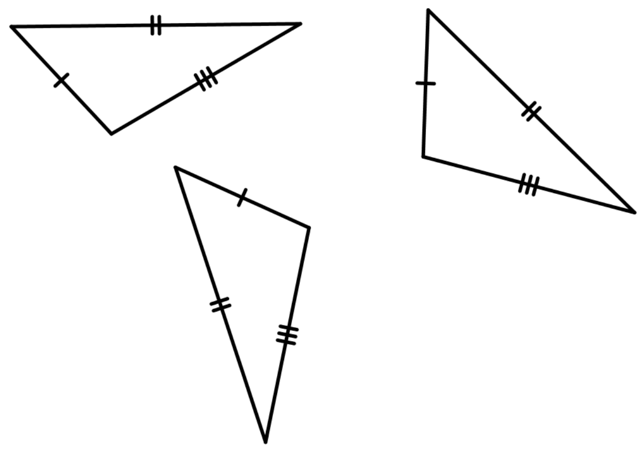
– *određena* – ako ima konačno mnogo rješenja,

– *neodređena* – ako ima beskonačno mnogo rješenja,

– *nemoguća* – ako nema rješenja.

Likovi koji zadovoljavaju uvjete zadaće mogu se razlikovati po obliku, veličini i položaju u ravnini. Ako se rješenja zadaće razlikuju samo po položaju u ravnini, tada ta rješenja ne smatramo bitno različitima.

Primjer 1.1. Dane su tri dužine. Konstruirati trokut čije su stranice sukladne danim dužinama.



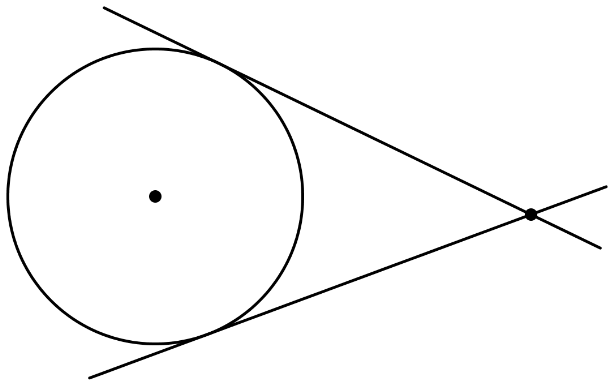
Slika 1.3: Primjer 1.1

Rješenje. Svi trokuti kojima su stranice sukladne trima danim dužinama su međusobno sukladni (SSS teorem o sukladnosti). Zato ta rješenja nisu bitno različita i smatramo da ova zadaća ima samo jedno rješenje (uz pretpostavku da rješenje postoji za što moraju biti ispunjene odgovarajuće nejednakosti koje dobivamo iz nejednakosti trokuta). ♢

Primjer 1.2. Iz dane točke izvan dane kružnice konstruirati tangente na tu kružnicu.

Rješenje. Postoje dvije različite tangente. Ovo je stoga određena zadaća koja ima dva rješenja. Znate li ih konstruirati? ♢

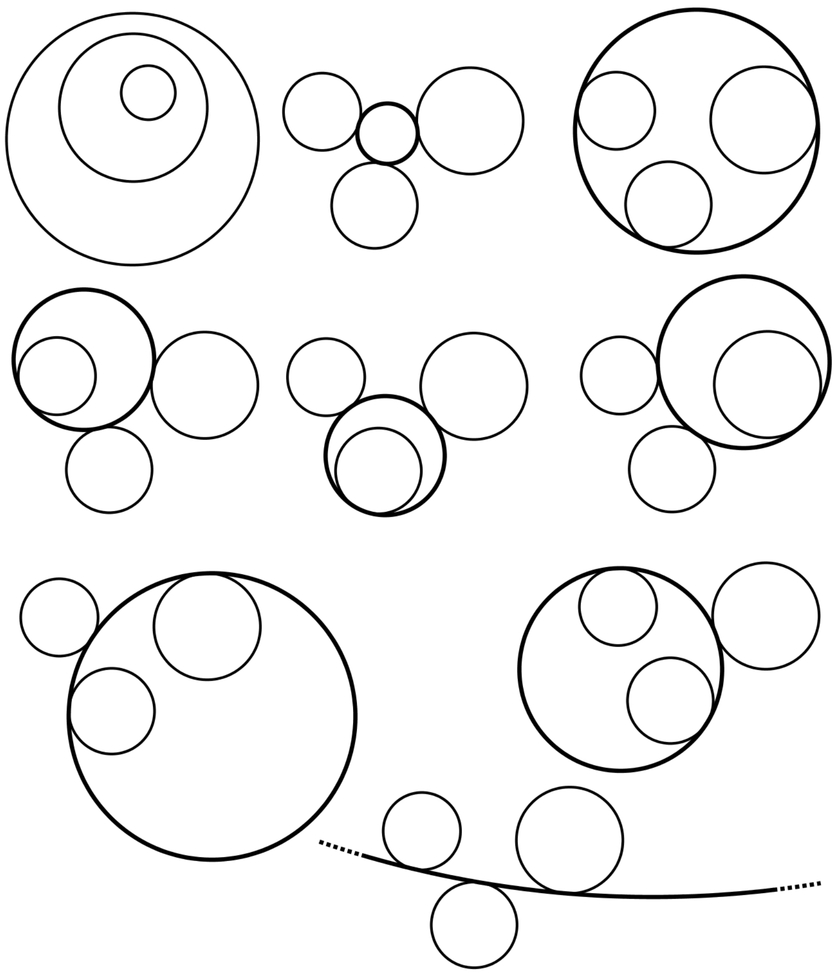
Primjer 1.3. Konstruirati zajedničke tangente dviju danih kružnica od kojih je svaka izvan druge.



Slika 1.4: Primjer 1.2

Rješenje. Postoje četiri rješenja. ♢

Primjer 1.4. Konstruirati kružnicu koja dodiruje svaku od tri dane kružnice.



Slika 1.5: Primjer 1.4, lijevo gore je nemoguća zadaća, a ostalo jedna određena zadaća

Rješenje. Ovisno o položaju tih kružnica, moguće je da nema rješenja, ali može imati i čak do 8 rješenja. ♢

Ako zadaća ima beskonačno mnogo rješenja, kažemo da je ta zadaća *neodređena*. Tada je u pravilu broj uvjeta premalen i treba dodati još uvjeta da zadaća postane određena.

Primjer 1.5. Konstruirati trokut čije su dvije stranice sukladne danim dvjema dužinama.

Rješenje. Postoji beskonačno mnogo bitno različitih trokuta koji zadovoljavaju navedeni uvjet, pa je to neodređena zadaća. Međutim, ako se zada još jedan element (npr. treća stranica ili neki kut), zadaća postaje određena. ♢

Za zadaću koja ima barem jedno rješenje, kažemo da je *moguća*. Ako zadaća nema rješenja, tada kažemo da je *nemoguća*.

Primjer 1.6. Danom pravokutniku koji nije kvadrat upisati kružnicu koja dira sve njegove stranice

Rješenje. Ovo je nemoguća zadaća. ♢

Ako zadaća ima rješenje, a pri konstrukciji tog rješenja nije korišten neki uvjet zadaće, onda je taj uvjet očito suvišan i kažemo da je zadaća *preodređena*.

Primjer 1.7. Konstruirati četverokut kojemu su sve četiri stranice sukladne danoj dužini, nasuprotne stranice su mu paralelne i svi kutovi pravi, a dijagonale međusobno okomite i raspolavljaju se.

Rješenje. Ovo je preodređena zadaća. Dovoljno bi bilo tražiti primjerice kvadrat sa stranicom sukladnom danoj dužini. ♢

Reći ćemo da je zadaća *elementarno rješiva* ako se može riješiti samo pomoću ravnala i šestara, tj. ako se može svesti na konačan niz ranije navedenih temeljnih konstrukcija.

Treba razlikovati pojam moguće zadaće od pojma elementarno rješive zadaće. Postoje zadaće (npr. trisekcija kuta i ostale klasične zadaće) koje su moguće (npr. postoji triput manji kut od zadanog), ali nisu elementarno rješive.

Krajem semestra opisat ćemo detaljno sva tri klasična problema i objasniti zašto nisu elementarno rješivi.

Pri rješavanju konstruktivnih zadaća osim temeljnih konstrukcija pojavljuju se vrlo često još neke jednostavne konstrukcije koje ćemo zvati *elementarnim zadaćama*. Pri opisu složenijih konstrukcija, ove konstrukcije mogu biti pojedini koraci, tj. ne treba ih detaljnije opisivati jer znamo kako se izvode.

Popis elementarnih zadaća je stvar dogovora. Npr. za elementarne zadaće možemo uzeti ove zadaće:

- E1. Raspoloviti danu dužinu.
- E2. Raspoloviti dani kut.
- E3. Na zadanom pravcu konstruirati dužinu sukladnu danoj dužini (prenošenje dužine).
- E4. Konstruirati kut jednak danom kutu, ako je zadan jedan krak (prenošenje kuta).
- E5. Kroz danu točku konstruirati pravac paralelan s danim pravcem.
- E6. Konstruirati okomicu danom točkom na dani pravac.

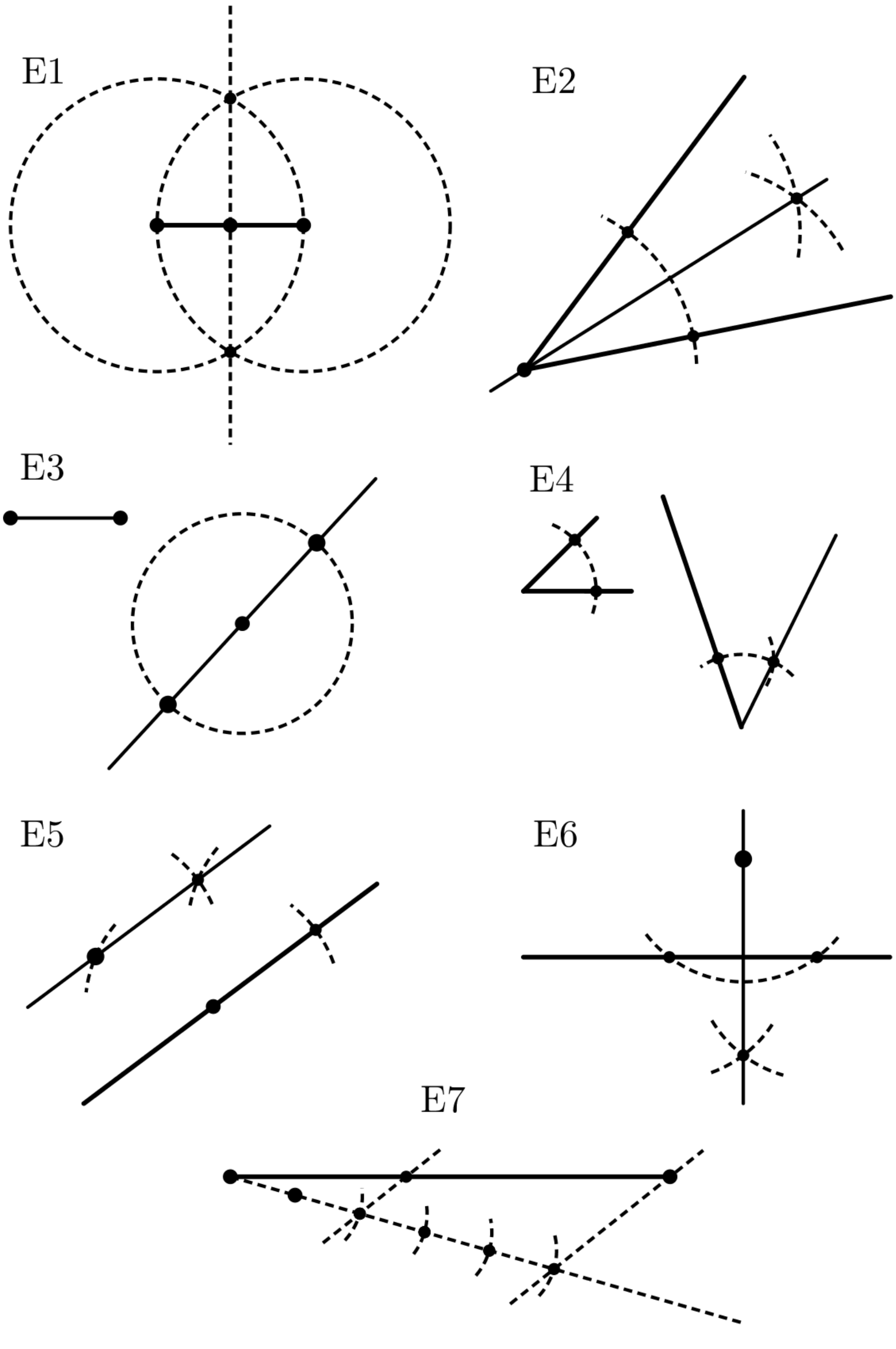
E7. Podijeliti danu dužinu u određenom omjeru.

E8. Konstruirati trokut ako su dane sve tri stranice.

E9. Konstruirati trokut ako su dane dvije stranice i kut između njih.

E10. Konstruirati trokut ako je dana jedna stranica i kutovi uz nju.

E11. Konstruirati pravokutni trokut ako je dana jedna kateta i hipotenuza.



Slika 1.6: Ilustracija elementarnih zadaća E1-E7

Posljednje četiri često ćemo zvati osnovne konstrukcije trokuta. Primijetimo da su E8, E9 i E10 redom SSS, SKS i KSK konstrukcije, dok je E11 specijalni slučaj SSK konstrukcije.

Da bi se neka konstruktivna zadaća riješila treba:

– ustanoviti konačan broj načina na koji se mogu izabrati dani elementi

– u svakom pojedinom slučaju odgovoriti na pitanja ima li zadaća rješenja i koliko ih je

– opisati konstrukciju rješenja u svakom slučaju kada postoji rješenje ili utvrditi da se zadaća ne može riješiti danim instrumentima.

Pri rješavanju konstruktivne zadaće treba se držati ovog redoslijeda zaključivanja i rješavanja:

1. analiza,
2. konstrukcija,
3. dokaz,
4. rasprava.

Pod *analizom* mislimo na traženje načina za rješavanje zadaće. Tu se ispituje veza danog i traženog lika uz pomoć eventualnih pomoćnih likova. U analizi se koriste raniji poznati teoremi i konstrukcije.

Konstrukcija se sastoji u tome da se na temelju analize istakne onaj niz osnovnih i temeljnih konstrukcija ili ranije riješenih zadaća koji daje traženi lik.

Dokaz je korak kojim se pokazuje da dobiveni lik zadovoljava sve uvjete zadaće i da je svaki korak u konstrukciji moguć.

Raspravom se odgovara na pitanja:

- Je li uvijek moguće izvršiti konstrukciju na promatrani način?
- Je li moguće traženi lik konstruirati na neki drugi način u slučaju kada se promatrani način ne može primijeniti?
- Koliko rješenja ima zadaća uz svaki mogući odabir danih elemenata?

U raspravi, odnosno diskusiji se ispituju svi međusobni položaji danih elemenata koji mogu doći u obzir.

Kod rješavanja nekih jednostavnijih zadaća može se dopustiti da se neki od navedenih koraka ne pojavljuje.

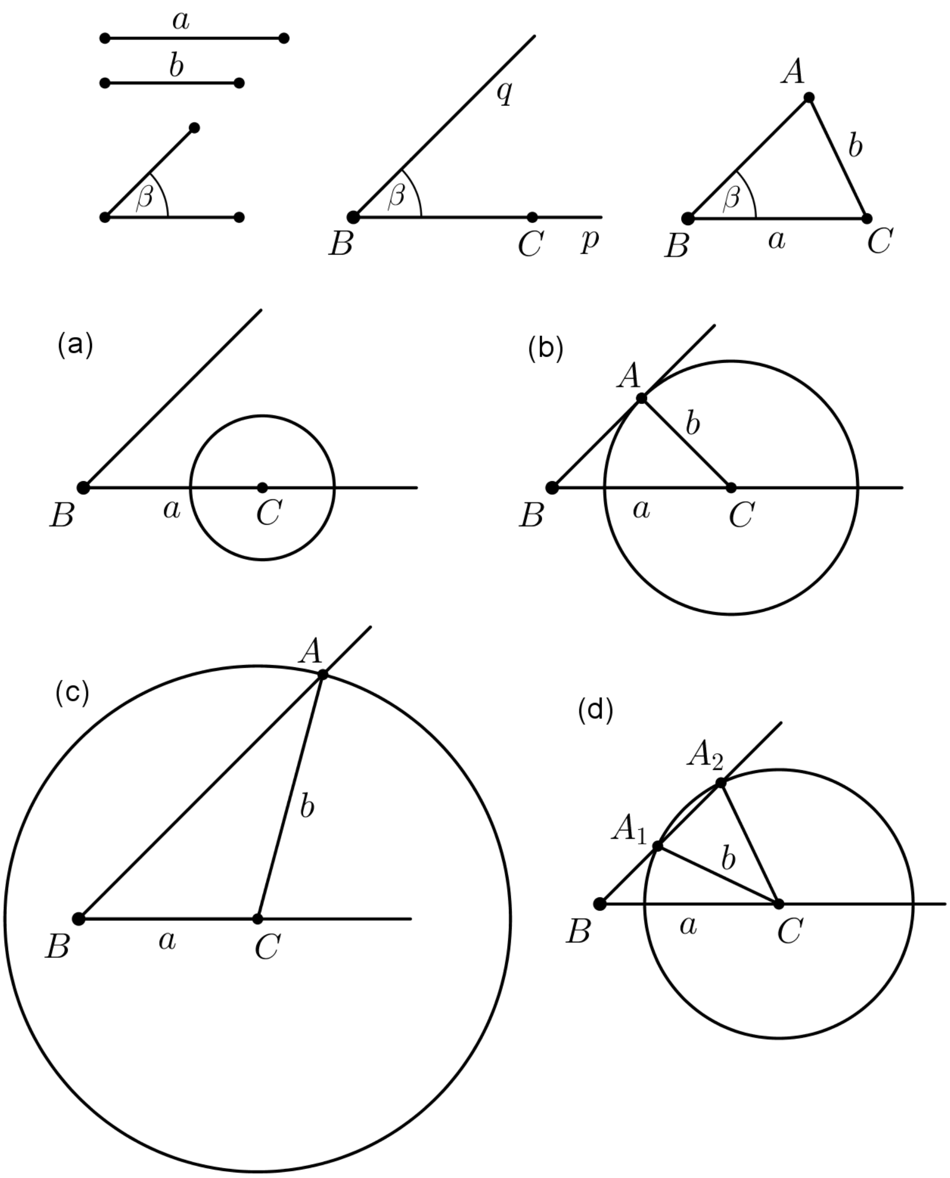
Primjer 1.8 (SSK konstrukcija)**.** Dane su dvije dužine duljina a i b i kut veličine β. Konstruirati trokut ABC kojem je $|BC| = a$, $|CA| = b$ i $|\sphericalangle ABC| = \beta$.

Rješenje. **Analiza** je jednostavna, pa ju preskačemo.

Konstrukcija je prikazana u gornjem dijelu Slike 1.7 i sastoji se od sljedećih koraka:

1. Konstruirati dužinu $\overline{BC}$ takvu da je $|BC| = a$. (E3)
2. Konstruirati polupravac $BC = p$. (AR)
3. Konstruirati kut $\sphericalangle pBq$ takav da je $|\sphericalangle pBq| = \beta$, tj. konstruirati polupravac q za koji to vrijedi. (E4)

4. Konstruirati kružnicu k sa središtem u C i polumjerom b. (AŠ)
5. Konstruirati točku $A \in k \cap q$. (A4)

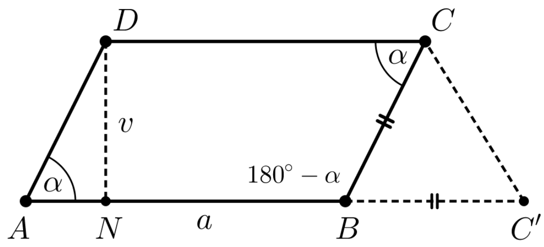


Slika 1.7: Primjer 1.8, u prvom redu je prikaz konstrukcije, a druga dva reda prikazuju različite mogućnosti iz rasprave

Dokaz se sastoji u tome da provjerimo da trokut ABC zadovoljava tražene uvjete. No, $|BC| = a$ slijedi iz 1. koraka, $|CA| = b$ iz 4. i 5. koraka, a $|\sphericalangle ABC| = \beta$ iz 3. i 5. koraka konstrukcije.

Budući da su koraci 1.-4. u konstrukciji uvijek mogući i jednoznačni, **rasprava** se svodi na provjeru 5. koraka. Kružnica k siječe polupravac q u 0, 1 ili 2 točke. Točnije, ako je $\beta < 90°$, onda za $b < a \sin \beta$ nema rješenja (Slika 1.7(a)), za $b = a \sin \beta$ (Slika (b)) i za $b \geqslant a$ (Slika (c)) postoji točno jedno rješenje te za $a \sin \beta < b < a$ postoje dva različita rješenja, tj. dobivamo nesukladne trokute A_1BC i A_2BC (Slika (d)). Ako je $\beta \geqslant 90°$, onda za $b \leqslant a$ nema rješenja dok za $b > a$ postoji točno jedno rješenje ove konstruktivne zadaće. ♢

Primjer 1.9. Konstruirajte paralelogram $ABCD$ ako je zadan kut $\alpha = \sphericalangle BAD$, duljina $d = |AB| + |BC|$ te duljina v visine na $\overline{AB}$.



Slika 1.8: Primjer 1.9, analiza

Rješenje. **Analiza.** Neka je $ABCD$ paralelogram koji zadovoljava uvjete zadatka. Produžimo li $\overline{AB}$ preko točke B do točke C' takve da je $|AC'| = d$, imamo da je $AC'CD$ trapez (vidi Sliku 1.8) u kojemu je zadana duljina osnovice $\overline{AC'}$, duljina visine na osnovicu i veličina jednog kuta $\sphericalangle BAD$ uz osnovicu. Budući da je $|BC'| = |AC'| - |AB| = d - |AB| = |BC|$, trokut $BC'C$ je jednakokračan, pa je zbog $\sphericalangle CBA = 180° - \alpha$, dan i drugi kut $\sphericalangle CC'A = \frac{180° - \alpha}{2}$ uz osnovicu $\overline{AC'}$ promatranog trapeza. Ako je N nožište okomice iz D na AB, vidimo da su u pravokutnom trokutu AND poznati kut $\sphericalangle NAD$ uz hipotenuzu i duljina njemu nasuprotne katete $|DN| = v$.

Konstrukcija. (I. način) Na osnovi analize ove zadaće, radimo redom:

1. Konstruiramo trokut AND s pravim kutom u vrhu N, kutom $\sphericalangle ADN = 90° - \alpha$ i $|DN| = v$. (KSK)
2. Na polupravcu AN odredimo točku C' takvu da je $|AC'| = d$. (E3)
3. Povučemo kroz točku D paralelu s pravcem AC'. (E5)
4. U točki C' povučemo polupravac tako da je kut između tog polupravca i $C'A$ jednak $\frac{180° - \alpha}{2}$. (E4)
5. Sjecište pravca iz 3. koraka i polupravca iz 4. koraka je točka C. (A4)
6. Sjecište paralele s AD kroz C i pravca AC' je točka B. (E4 ,A4)

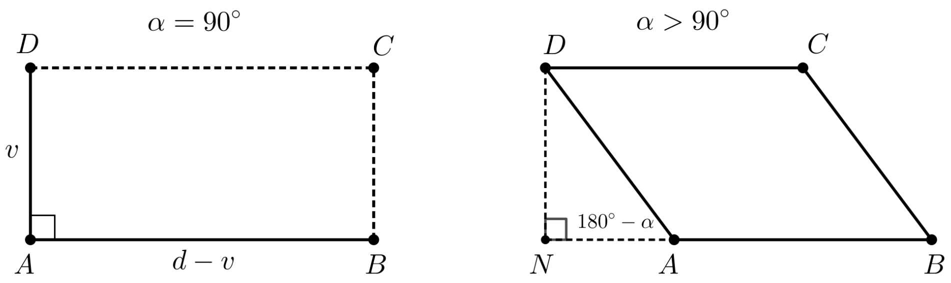
Primijetimo da je u 1. i 4. koraku trebalo konstruirati kutove veličine $90° - \alpha$ i $\frac{180° - \alpha}{2}$. Detalje tih konstrukcija ostavljamo čitatelju.

(II. način) Možemo raditi i ovako:

1. Konstruiramo trokut AND s pravim kutom u vrhu N, kutom $\sphericalangle ADN = 90° - \alpha$ i $|DN| = v$. (KSK)
2. Na polupravcu AN odredimo točku B takvu da je $|AB| = d - |AD|$. (E3 dvaput)
3. Povučemo točkom D paralelu s pravcem AB. (E5)
4. Povučemo točkom B paralelu s pravcem AD. (E5)
5. Sjecište pravaca iz 3. i 4. koraka je točka C. (A4)

Dokaz. Donosimo dokaz samo za II. način provođenja konstrukcije. Zbog koraka 3. i 4. dobili smo paralelogram. Zbog 1. koraka je $\sphericalangle BAD = \alpha$ i visina na $\overline{AB}$ je jednaka v. Zbog 2. koraka je $d = |AB| + |AD| = |AB| + |BC|$.

Rasprava. I u raspravi pratimo II. način konstrukcije traženog paralelograma. Vidimo da je 1. korak moguće napraviti ako je $\alpha < 90°$. Uz taj uvjet, 2. korak je moguć ako je $d > |AD| = \frac{v}{\sin\alpha}$. Ostali koraci se onda mogu provesti bez dodatnih uvjeta. Dakle, za šiljasti kut α zadatak ima rješenje ako i samo ako je $d > \frac{v}{\sin\alpha}$ i to rješenje je jedinstveno.



Slika 1.9: Primjer 1.9, slučajevi kad je α pravi ili tupi kut

Za $\alpha = 90°$ i $90° < \alpha < 180°$ konstrukciju treba malo modificirati kako je naznačeno na Slici 1.9. Detaljnu analizu, konstrukciju, dokaz i raspravu napravite za vježbu sami. $\diamondsuit$

Uočite da dvije različite konstrukcije istog problema imaju različite dokaze.

Postoje neke specijalne metode za rješavanje konstruktivnih zadaća. Najčešće se koriste: metoda presjeka, algebarska metoda i metoda transformacija.

1.4 Metoda presjeka

Neke određene zadaće u kojima traženi lik mora zadovoljavati dva ili više uvjeta mogu se riješiti tzv. metodom presjeka na sljedeći način: Od uvjeta se izaberu neki (ne svi) i traže se svi likovi koji zadovoljavaju te uvjete. Dobiva se jedna neodređena zadaća koja općenito ima beskonačno mnogo rješenja. Neka je $\mathcal{R}_1$ skup svih tih rješenja. Sada od zadanih uvjeta odaberemo neke druge uvjete (opet ne sve) i riješimo dobivenu neodređenu zadaću. Dobivamo neki skup rješenja $\mathcal{R}_2$. Ovaj postupak nastavimo potreban broj puta, recimo n. U svakom slučaju dobivamo neku neodređenu zadaću i pripadni skup rješenja $\mathcal{R}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Pritom treba paziti da se svaki uvjet dane zadaće nalazi kao uvjet u barem jednoj od promatranih n neodređenih zadaća. Tada je skup $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{R}_n$ lik koji je rješenje početne zadaće jer ispunjava sve dane uvjete.

Primjer 1.10. Konstruirati točku koja je jednako udaljena od danih točaka A, B i C.

Rješenje. Tražena točka T mora zadovoljavati uvjete $d(T, A) = d(T, B) = d(T, C)$.

To možemo shvatiti kao dva neovisna uvjeta: $d(T, A) = d(T, B)$ i $d(T, B) = d(T, C)$.

Neka je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{T \mid d(T, A) = d(T, B)\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{T \mid d(T, B) = d(T, C)\}. \end{aligned}$$

Vidimo da je $\mathcal{R}_1$ simetrala dužine $\overline{AB}$, a $\mathcal{R}_2$ simetrala dužine $\overline{BC}$. Tada je rješenje zadanog problema $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, tj. sjecište te dvije simetrale. $\diamondsuit$

Ovom metodom obično tražimo točku, ali to je sastavni dio gotovo svake konstrukcijske zadaće.

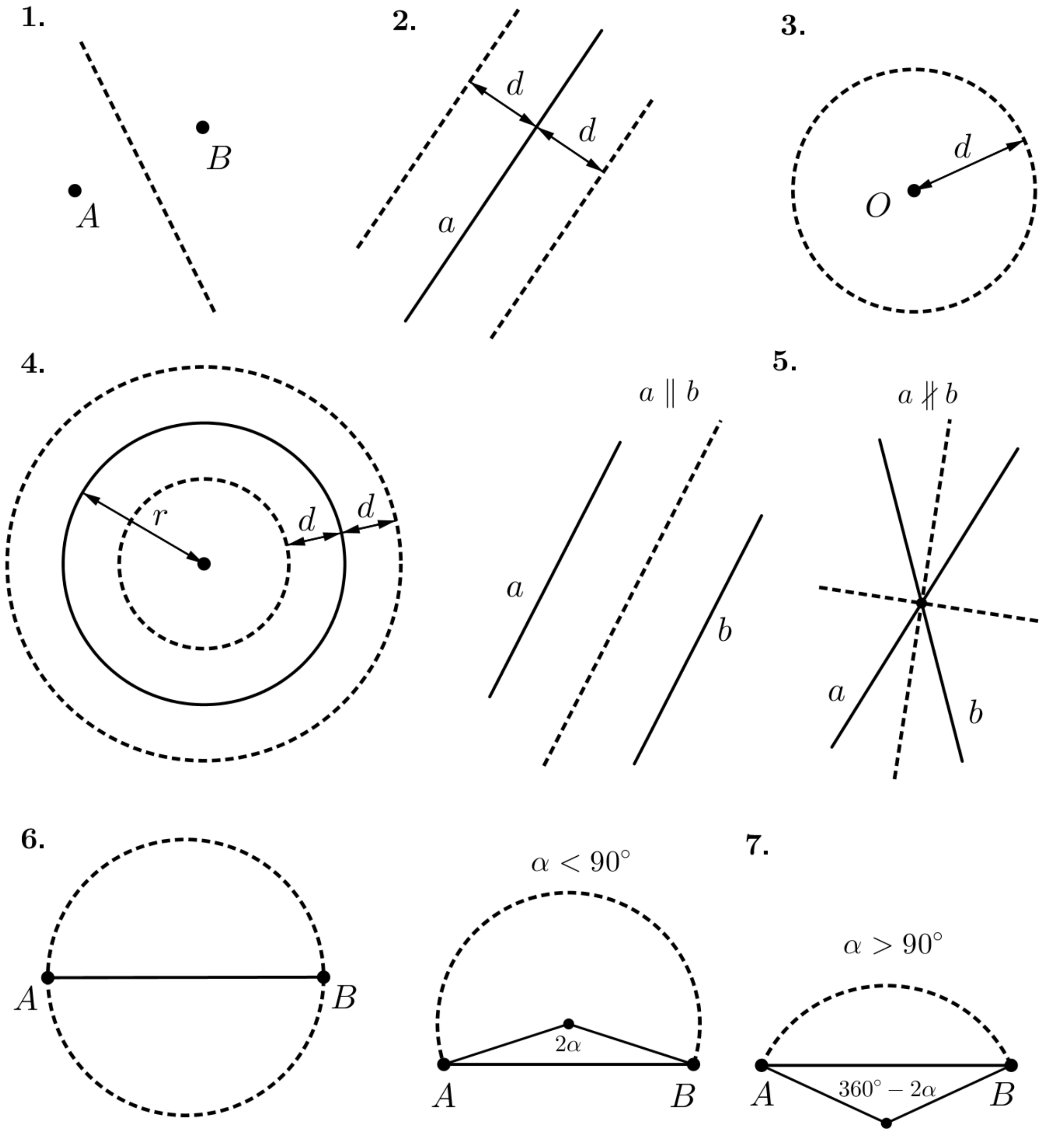
Primjer 1.11. Konstruirajte trokut ako je dano b, c, α.

Rješenje. Traži se trokut ABC.

Najprije nacrtamo dužinu $\overline{AB}$ duljine c, te još trebamo odrediti položaj točke C. Točka C zadovoljava dva uvjeta:

1. $\sphericalangle BAC = \alpha$, što znači da C leži na polupravcu koji s AB zatvara kut α;
2. $|AC| = b$, što znači da C leži na kružnici oko točke A polumjera b.

Sada je jasno da rješenje dobivamo metodom presjeka. ♢



Slika 1.10: Neke neodređene zadaće

Svaka pojedina od zadaća koje dobivamo ispuštanjem pojedinih uvjeta općenito ima neki beskonačan skup rješenja. Zato je potrebno znati riješiti najčešće neodređene zadaće. Rješenja idućih zadaća prikazana su na Slici 1.10.

1. Odrediti točke jednako udaljene od dvije zadane točke A i B.

   Rješenje: simetrala dužine $\overline{AB}$.

2. Odrediti točke na udaljenosti d od danog pravca a.

   Rješenje: dvije paralele s a.

3. Odrediti točke udaljene za d od dane točke O.

   Rješenje: kružnica $k(O, d)$, što je oznaka za kružnicu sa središtem u točki O i polumjerom d.

4. Odrediti točke udaljene za d od dane kružnice $k(O, r)$.

   Rješenje: kružnice $k(O, r + d)$ i $k(O, r - d)$.
   Rasprava: uz uvjet $d < r$ obje kružnice, za $d = r$ prva kružnica i točka O, za $d > r$ samo prva kružnica.

5. Odrediti točke jednako udaljene od dva dana pravca a i b.

   Rješenje: simetrale.
   Dvije, ako se pravci sijeku; samo jedna ako su pravci paralelni.

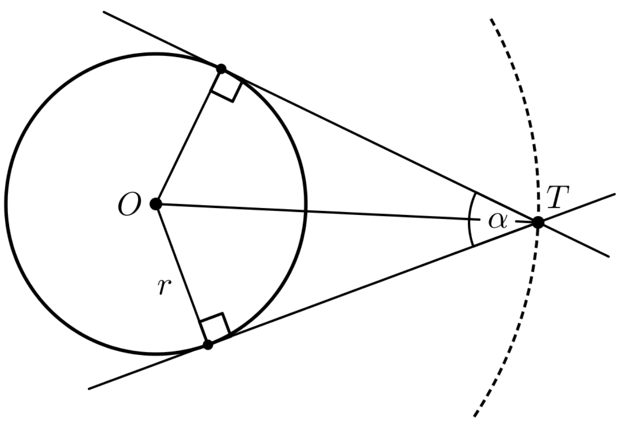
6. Odrediti točke iz kojih se dana dužina $\overline{AB}$ vidi pod kutom od $90°$.

   Rješenje: kružnica promjera $\overline{AB}$ (Talesov teorem).

7. Odrediti točke s dane strane pravca AB iz kojih se dana dužina $\overline{AB}$ vidi pod danim kutom α.

   Rješenje: luk kružnice kroz A i B.
   Konstrukcija: nacrtamo jednakokračni trokut ABS s osnovicom $\overline{AB}$ i kutovima uz tu stranicu jednakim $90° - \alpha$ za $\alpha < 90°$, odnosno $\alpha - 90°$ za $\alpha > 90°$; kružnica $k(S, |SA|)$ sadrži traženi luk s krajevima A i B.

Primjer 1.12. Odrediti geometrijsko mjesto točaka iz kojih se kružnica k vidi pod kutom α.

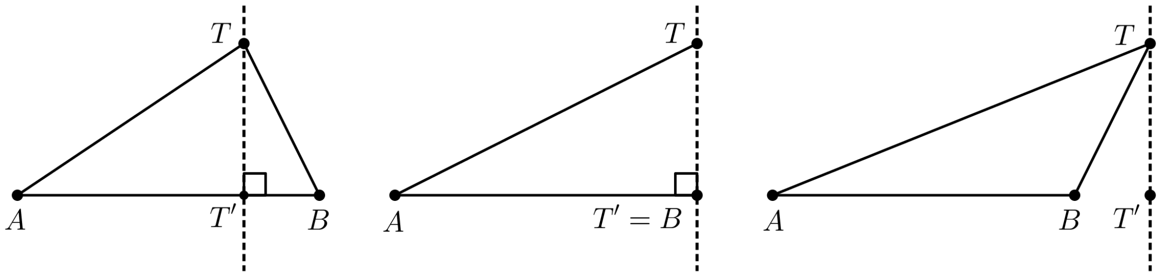


Slika 1.11: Primjer 1.12

Rješenje. Neka je dana kružnica k sa središtem u O i polumjerom r kao na Slici 1.11. Iz točke T se kružnica k vidi pod kutom α ako i samo ako je $\frac{r}{|OT|} = \sin\frac{\alpha}{2}$, odnosno $|OT| = r/\sin\frac{\alpha}{2}$. Dakle, traženi skup točaka T je kružnica sa središtem u O koju možemo dobiti tako da primjerice u točki O odaberemo dva polumjera koji zatvaraju kut $180° - \alpha$ i odredimo sjecište odgovarajućih tangenti koje daje jednu točku na traženoj kružnici. ♢

Primjer 1.13. Odrediti geometrijsko mjesto točaka za koje je razlika kvadrata udaljenosti od dviju čvrstih točaka A, B jednaka danoj vrijednosti d^2.

Rješenje. Dane su točke A i B i broj d koji je duljina neke dužine. Treba konstruirati lik $\{T \mid |TA|^2 - |TB|^2 = d^2\}$.



Slika 1.12: Primjer 1.13, tri moguća slučaja protumačeni su u raspravi

Analiza. Neka je točka T rješenje, a T' nožište okomice iz T na pravac AB kao na lijevom dijelu Slike 1.12. Tada iz Pitagorinog teorema imamo

$$\begin{aligned} d^2 &= |AT|^2 - |BT|^2 = (|AT'|^2 + |TT'|^2) - (|BT'|^2 + |TT'|^2) = |AT'|^2 - |BT'|^2 \\ &= (|AT'| + |BT'|)(|AT'| - |BT'|) = |AB| \cdot (|AT'| - |BT'|). \end{aligned}$$

Označimo li sada s $a = |AB|$, dobili smo da je $|AT'| + |BT'| = a$ i $|AT'| - |BT'| = \frac{d^2}{a}$. Stoga je $2|AT'| = a + \frac{d^2}{a}$ i zato $|AT'| = \frac{a^2+d^2}{2a}$. Dakle, za sve točke T iz traženog skupa je točka T' ista.

Konstrukciju točke T' ćemo vidjeti uskoro kod algebarske metode.

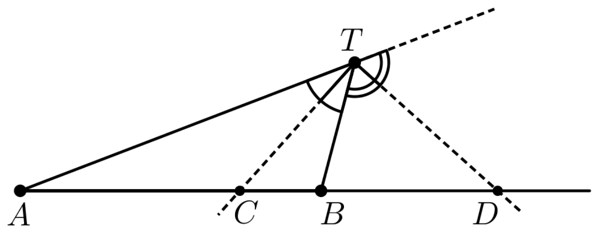
Dokazali smo da ako T zadovoljava uvjet, onda mora ležati na pravcu koji je okomit na AB i prolazi točkom T' na AB za koju je $|AT'| = \frac{a^2+d^2}{2a}$. Treba još dokazati da svaka točka tog pravca zadovoljava uvjet. To ostavljamo čitateljima.

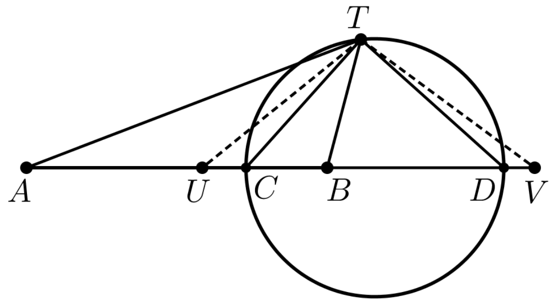
Rasprava. Primijetimo da je zbog uvjeta zadatka nužno točka T, pa i T' bliža B, nego A. Postoje tri mogućnosti za položaj točke T' u ovisnosti o veličini $|AT'| = \frac{a^2+d^2}{2a}$

$$\begin{array}{lllll} |AT'| < a & \Leftrightarrow & d < a & \Leftrightarrow & T' \text{ leži unutar dužine } \overline{AB}, \\ |AT'| = a & \Leftrightarrow & d = a & \Leftrightarrow & T' = B, \\ |AT'| > a & \Leftrightarrow & d > a & \Leftrightarrow & T' \text{ leži izvan dužine } \overline{AB}. \end{array}$$

Sva tri slučaja su ilustrirani na Slici 1.12. ♢

Primjer 1.14. Odrediti geometrijsko mjesto točaka za koje je omjer udaljenosti od dviju danih točaka A i B jednak danom omjeru $p : q$ $(p, q > 0)$.





Slika 1.13: Primjer 1.14, ilustracije za oba smjera u dokazu

Rješenje. Ako je $p = q$, točka T zadovoljava uvjet ako je $|TA| : |TB| = 1$, tj. $|TA| = |TB|$. Dakle, traženo geometrijsko mjesto je simetrala dužine $\overline{AB}$.

Zato u nastavku uzimamo $p \neq q$, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p > q$. Na pravcu AB postoje dvije točke koje zadovoljavaju uvjet. Neka su C i D točke na pravcu AB takve da je C na dužini $\overline{AB}$, a D izvan te dužine i vrijedi $|AC| : |CB| = |AD| : |DB| = p : q$. Odredimo udaljenosti ovih točaka od A u ovisnosti o zadanim veličinama.

$$\begin{aligned}
\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AC|}{|AB| - |AC|} = \frac{p}{q} \quad &\Rightarrow \quad |AB| - |AC| = \frac{q}{p}|AC| \\
&\Rightarrow \quad |AB| = \left(1 + \frac{q}{p}\right)|AC| \quad \Rightarrow \quad |AC| = \frac{p}{p+q}|AB|, \\
\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AD|}{|AD| - |AB|} = \frac{p}{q} \quad &\Rightarrow \quad |AD| = \frac{p}{q}(|AD| - |AB|) \\
&\Rightarrow \quad \frac{p}{q}|AB| = \left(\frac{p}{q} - 1\right)|AD| \quad \Rightarrow \quad |AD| = \frac{p}{p-q}|AB|.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da su točke C i D jednoznačno određene i znat ćemo ih konstruirati kad uskoro obradimo algebarsku metodu.

Neka je T točka izvan pravca AB koja zadovoljava uvjet $|TA| : |TB| = p : q$. Sada iz $|TA| : |TB| = p : q = |CA| : |CB| = |DA| : |DB|$ slijedi da je TC simetrala unutrašnjeg, a TD simetrala vanjskog kuta pri vrhu T trokuta ABT. Zato su TC i TD okomite, tj. imamo $\sphericalangle CTD = 90°$ iz čega po obratu Talesovog teorema slijedi da je T točka na kružnici s promjerom $\overline{CD}$. Tu kružnicu zovemo *Apolonijeva kružnica* za dužinu $\overline{AB}$ i omjer $\frac{p}{q}$.

Treba još dokazati da za svaku točku na kružnici s promjerom $\overline{CD}$ vrijedi $|TA| : |TB| = p : q$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neku točku T na navednoj kružnici vrijedi da je $\frac{|TA|}{|TB|} \neq \frac{p}{q}$. Pretpostavimo da je $\mu = \frac{|TA|}{|TB|} < \frac{p}{q}$ jer se drugi slučaj rješava potpuno analogno.

Neka je U sjecište simetrale unutrašnjeg kuta pri vrhu T trokuta ABT s pravcem AB, a V sjecište simetrale vanjskog kuta pri istom vrhu s istim pravcem. Iz teorema o simetrali kuta u trokutu imamo $\frac{|AU|}{|UB|} = \frac{|AV|}{|VB|} = \mu$. U prvom dijelu rješenja smo izveli vrijednosti

$\frac{|AC|}{|AB|}$ i $\frac{|AD|}{|AB|}$ izražene preko $\frac{p}{q}$, a slično dobivamo $\frac{|AU|}{|AB|}$ i $\frac{|AV|}{|AB|}$ kao funkcije od μ. Stoga je

$$\frac{|AU|}{|AC|} = \frac{\frac{|AU|}{|AB|}}{\frac{|AC|}{|AB|}} = \frac{\frac{\mu}{\mu+1}}{\frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}+1}} < 1, \qquad \frac{|AV|}{|AD|} = \frac{\frac{|AV|}{|AB|}}{\frac{|AD|}{|AB|}} = \frac{\frac{\mu}{\mu-1}}{\frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1}} > 1,$$

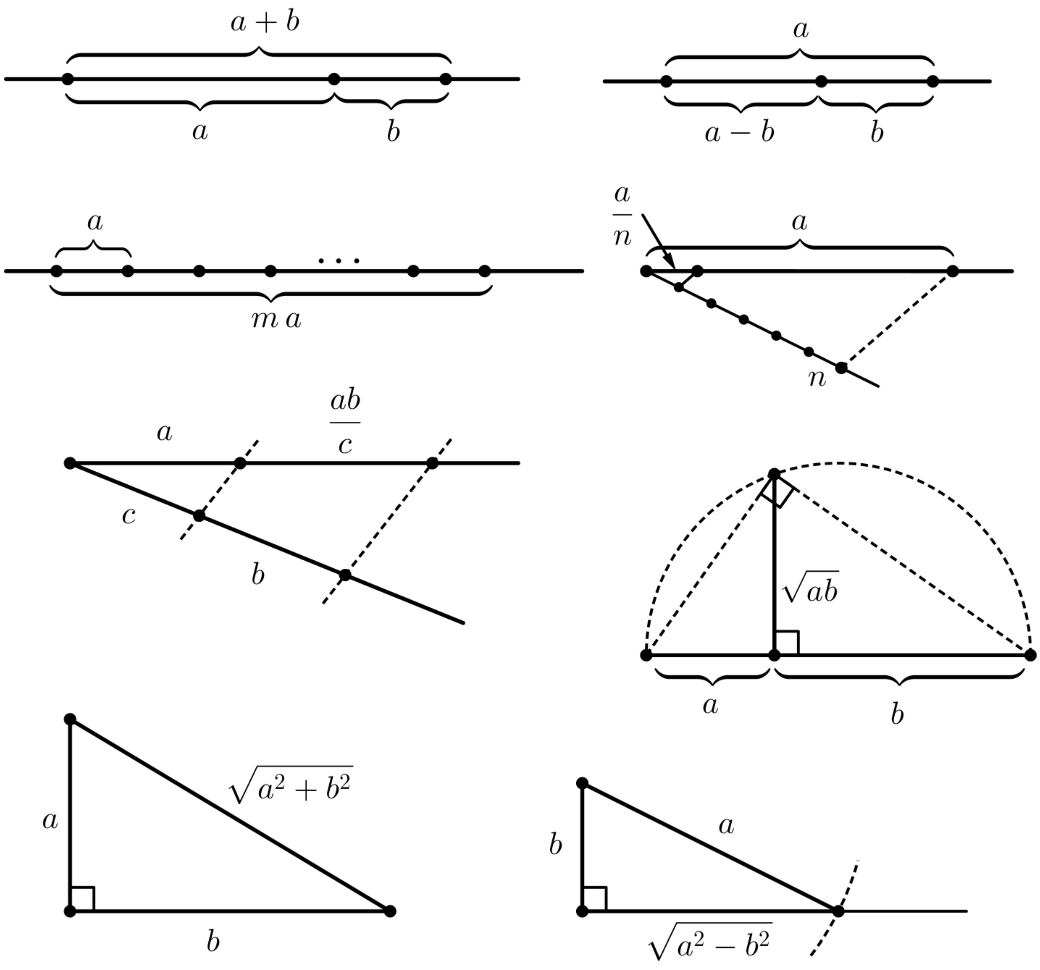
gdje smo koristili lako provjerljive činjenice da je funkcija $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ rastuća , a funkcija $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ padajuća na intervalu $(1, +\infty)$.

Dakle, poredak točaka na pravcu AB je A, U, C, B, D, V kako je ilustrirano na desnom dijelu Slike 1.13. No to bi značilo da je $\sphericalangle UTV > \sphericalangle CTD = 90°$ što je u kontradikciji s činjenicom da su TU i TV simetrale sukuta, pa zato okomiti pravci. $\diamondsuit$

Na vježbama će se rješavati zadatci primjenom metode presjeka.

1.5 Algebarska metoda

Radi se u osnovi o metodi algebarske analize. Do rješenja konstruktivne zadaće dolazi se tako da se tražena veličina (npr. duljina) izračuna pomoću danih elemenata i dobiveni izraz konstruira.



Slika 1.14: Konstrukcije osnovnih algebarskih izraza

Pri tom se neki algebarski izraz može konstruirati ako se on dobiva konačnim brojem tzv. racionalnih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijenjenje) i vađenja kvadratnog korijena iz danih elemenata.

Ako su dane duljine a, b i c i prirodni brojevi m i n, konstruirajte dužinu duljine

$$a+b, \quad a-b, \quad ma, \quad \frac{1}{n}a, \quad \frac{m}{n}a, \qquad \frac{ab}{c}, \quad \sqrt{ab}, \quad \sqrt{a^2+b^2}, \quad \sqrt{a^2-b^2}.$$

Konstrukcije su prikazane na Slici 1.14. U tim konstrukcijama primjenjujemo Talesov teorem o proporcionalnim dužinama, Euklidov teorem o visini na hipotenuzu pravokutnog trokuta te Pitagorin teorem.

Zadatak 1.15. Za svaki od navedenih algebarskih izraza opišite i dokažite konstrukciju.

Mogu se konstruirati i dužine određene nekim složenijim izrazima.

Primjer 1.16. Dane su dužine duljina a, b, c, d.

(a) Konstruirati dužinu duljine $x = \dfrac{a^3b^2}{c^2d^2}$.

(b) Konstruirati dužinu duljine $x = \sqrt{a^2+b^2-cd}$.

(c) Konstruirati dužinu duljine $x = \sqrt[4]{a^4-b^4}$.

(d) Konstruirati dužinu duljine $x = \sqrt[4]{a^4+b^4}$.

Rješenje. Koristeći se konstrukcijama osnovnih algebarskih izraza redom dobivamo:

(a) $p = \dfrac{ab}{c}$, $q = \dfrac{ab}{d}$, $r = \dfrac{cd}{a}$, $\quad \dfrac{pq}{r} = \dfrac{\frac{ab}{c}\cdot\frac{ab}{d}}{\frac{cd}{a}} = \dfrac{a^3b^2}{c^2d^2} = x$;

(b) $p = \sqrt{a^2+b^2}$, $q = \sqrt{cd}$, $\quad x = \sqrt{p^2-q^2}$.

(c) $p = \sqrt{a^2+b^2}$, $q = \sqrt{a^2-b^2}$, $\qquad x = \sqrt{pq}$.

(d) $p = \sqrt{a^2+b^2}$, $q = \sqrt{b^2+b^2}$, $r = \sqrt{aq}$, $s = \sqrt{p^2-r^2}$, $t = \sqrt{p^2+r^2}$, $x = \sqrt{st}$. $\diamondsuit$

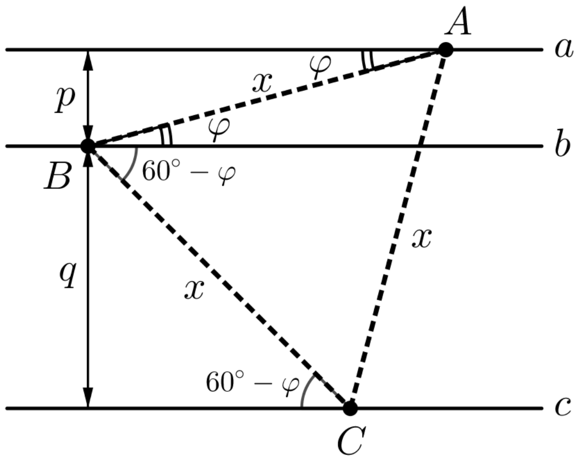
Zadatak 1.17. Konstruirajte točku T' u Primjeru 1.13 te točke C i D u Primjeru 1.14.

Pokažimo sada na dva nešto složenija primjera kako se konstruktivne zadaće rješavaju algebarskom metodom.

Primjer 1.18. Dani su paralelni pravci a, b, c. Konstruirati jednakostranični trokut ABC tako da je $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je pravac b između pravaca a i c. Neka je x duljina stranice trokuta ABC te označimo udaljenost pravaca a i b s p, a udaljenost pravaca b i c s q. Neka je φ kut kao na Slici 1.15, a onda iz paralelnosti i činjenice da je ABC jednakostraničan trokut lako dobivamo i ostale kutove označene na toj slici.

Sada je $\dfrac{p}{x} = \sin\varphi$ i $\dfrac{q}{x} = \sin(60^\circ - \varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \dfrac{1}{2}\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{x}$, pa je $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{q}{x} + \dfrac{p}{2x}\right) = \dfrac{2q+p}{\sqrt{3}x}$.



Slika 1.15: Primjer 1.18

Zato imamo

$$
\begin{aligned}
1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \left(\frac{p}{x}\right)^2 + \left(\frac{2q+p}{\sqrt{3}x}\right)^2 &= \frac{p^2}{x^2} + \frac{(2q+p)^2}{3x^2}, \\
3x^2 = 3p^2 + (2q+p)^2 &= 4p^2 + 4pq + 4q^2, \\
x = \sqrt{\frac{4}{3}(p^2+pq+q^2)} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{p^2+q^2+pq},
\end{aligned}
$$

a ovaj izraz znamo konstruirati. Primjerice, $s = \sqrt{p^2+q^2}$, $t = \sqrt{pq}$, $u = \sqrt{s^2+t^2}$, $x = \sqrt{2u \cdot \frac{2u}{3}}$.

Dakle, odaberemo po volji točku A na pravcu a i zatim točke B i C dobivamo kao neka sjecišta kružnice sa središtem u A i polumjerom x i pravaca b i c, tim redom.

Primijetimo da uvijek postoji rješenje jer je $x \geqslant p+q$ ekvivalentno s $4(p^2+pq+q^2) \geqslant 3(p+q)^2$, odnosno $(p-q)^2 \geqslant 0$, pa kružnica $k(A,x)$ siječe pravac c, a zato i b. Detaljniju raspravu ostavljamo čitatelju.

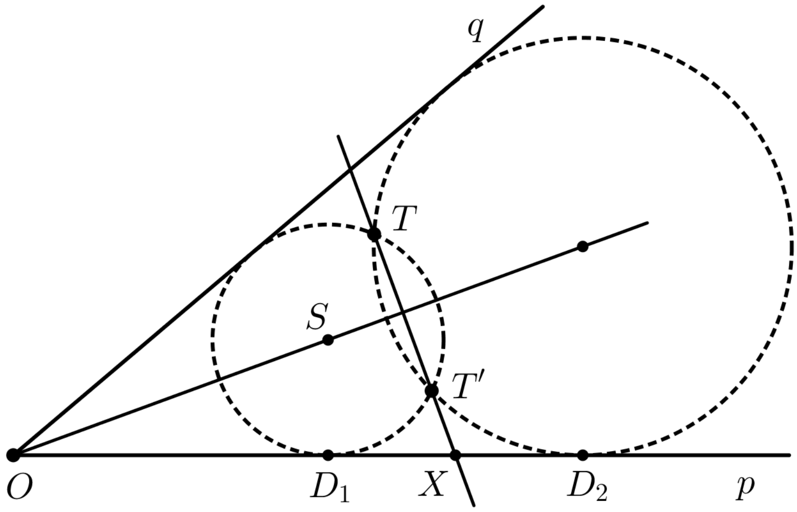
Spomenimo da se ovaj zadatak može riješiti i pomoću rotacije. ♢

Primjer 1.19. Dan je kut $\sphericalangle pOq$ i točka T unutar toga kuta. Konstruirati kružnicu koja dira krakove danog kuta i prolazi točkom T.

Rješenje. Neka je T' točka simetrična točki T s obzirom na simetralu danog kuta, kao na Slici 1.16. Zbog simetrije je i točka T' na traženoj kružnici. Neka je sjecište pravca TT' s krakom p točka X. Neka tražena kružnica dira krak p u točki D. Potencija točke X s obzirom na tu kružnicu je jednaka $|XD|^2 = |XT| \cdot |XT'|$. Desna strana zadnje jednakosti je poznata, pa možemo algebarskom metodom odrediti $|XD| = \sqrt{|XT| \cdot |XT'|}$, a kada nam je poznat D, središte tražene kružnice S dobivamo kao sjecište okomice na p u D i simetrale kuta $\sphericalangle pOq$.

U slučaju kada je $T = T'$, treba umjesto TT' uzeti okomicu u T na simetralu kuta $\sphericalangle pOq$.

Kružnica sa središtem u S i polumjerom $|ST|$ sigurno prolazi i točkom D jer je prema Pitagorinom teoremu i svojstvu potencije točke s obzirom na kružnicu $|SD|^2 = |SX|^2 - |DX|^2 = |SX|^2 - |XT| \cdot |XT'| = |ST|^2$.



Slika 1.16: Primjer 1.19

Konstruktivna zadaća ima dva rješenja.

Ovaj se zadatak može riješiti i pomoću homotetije. ♢

Poglavlje 2

Izometrije euklidske ravnine

Radit ćemo u *euklidskom prostoru* te smatramo da su pojmovi točka, pravac, vektor, udaljenost itd. kao i njihova osnovna svojstva poznati.

Izometrija euklidske ravnine je svaka bijekcija $f : E^2 \to E^2$ ravnine na samu sebe takva da za svake dvije točke A, B vrijedi $d\big(f(A), f(B)\big) = d(A, B)$, gdje je $d(A, B)$ udaljenost točaka A i B.

Primijetimo da se iz jednakosti koju funkcija f mora zadovoljavati lako dobiva da je f injekcija, ali je surjektivnost od f nešto teže pokazati, pa oba svojstva zahtijevamo u samoj definiciji izometrije.

Propozicija 2.1. *Izometrija preslikava pravce na pravce, a pritom čuva paralelnost pravaca, okomitost pravaca i općenito kut između pravaca, odnosno kut između slika jednak je kutu između originala.*

Dokaz. Neka je f izometrija. Neka su točke A, B, C kolinearne i pri tom je točka B između točaka A i C. Tada je $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$, pa je iz definicije izometrije $d(f(A), f(C)) = d(f(A), f(B)) + d(f(B), f(C))$. Sada nejednakost trokuta povlači da su točke $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ kolinearne. Budući da se kolinearne točke preslikavaju u kolinearne točke, zaključujemo da se pravac preslikava na pravac.

Neka se pravci a i b sijeku u točki S. Izaberimo točke A na a i B na b različite od S. Pravci $f(a)$ i $f(b)$ sijeku se u točki $f(S)$. Tada su trokuti ABS i $f(A)f(B)f(S)$ sukladni po SSS teoremu iz čega slijedi da je $\sphericalangle ASB = \sphericalangle f(A)f(S)f(B)$, odnosno $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(f(a), f(b))$, pa f čuva kut između pravaca a i b. Slučaj kada su a i b paralelni pravci lako je sada dobiti. $\square$

Teorem 2.2. *Skup svih izometrija euklidske ravnine tvori grupu s obzirom na kompoziciju. Tu grupu zovemo* grupa izometrija euklidske ravnine.

Dokaz. Treba pokazati zatvorenost, asocijativnost, postojanje neutralnog elementa i inverza svakog elementa.

Neka su f i g izometrije. Za svake dvije točke A, B vrijedi

$$d\big((f \circ g)(A), (f \circ g)(B)\big) = d\big(f(g(A)), f(g(B))\big) = d\big(g(A), g(B)\big) = d(A, B),$$

pri čemu smo najprije koristili činjenicu da je f izometrija, a zatim da je g izometrija. Budući da je $f \circ g$ bijekcija, imamo da je $f \circ g$ izometrija. Dakle, skup svih izometrija je zatvoren s obzirom na kompoziciju.

Neutralni element je identiteta, $id(T) = T$ za svaku točku T. Naime, za svake dvije točke A, B, je $d\big(id(A), id(B)\big) = d(A, B)$, pa je id izometrija, a osim toga je $id \circ f = f \circ id = f$ za svaku izometriju.

Ako je f izometrija, onda je po definiciji bijekcija, pa inverzna funkcija f^{-1} postoji i bijekcija je. Kako bi f^{-1} bila inverz, treba još provjeriti da čuva udaljenosti. Neka su A, B dvije točke te neka su A_1, B_1 takve da je $f^{-1}(A) = A_1$, $f^{-1}(B) = B_1$, odnosno $f(A_1) = A$, $f(B_1) = B$. Tada je

$$d\big(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\big) = d(A_1, B_1) = [f \text{ je izometrija}] = d\big(f(A_1), f(B_1)\big) = d(A, B).$$

To znači da je f^{-1} u skupu svih izometrija, a kako vrijedi $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$, vidimo da je f^{-1} traženi inverz.

Asocijativnost vrijedi općenito za komponiranje funkcija, pa tako i ovdje. □

Uočimo da navedena grupa nije komutativna u što se lako možemo uvjeriti promotrivši kompoziciju jedne translacije i osne simetrije kojoj os nije paralelna vektoru translacije.

Kažemo da je točka A *fiksna točka* izometrije f ako je $f(A) = A$.

Kažemo da je pravac a *fiksni pravac* izometrije f ako je $f(a) = a$, tj. $\{f(A) \mid A \in a\} = a$. Pripazimo: ovo ne znači da se fiksni pravac sastoji od fiksnih točaka, to može biti, ali i ne mora. Pravac čije su sve točke fiksne zovemo *"pravac fiksan po točkama"*.

2.1 Osne i centralne simetrije

Za izometriju f kažemo da je *involutorna* ako je f različita od identitete, ali $f \circ f = id$.

Involutornu izometriju kod koje su sve točke pravca a fiksne zovemo *osnom simetrijom s osi a* ili *simetrijom s obzirom na pravac a* i označavamo ju s_a.

Involutornu izometriju kod koje su svi pravci kroz točku A fiksni zovemo *centralnom simetrijom s centrom A* ili *simetrijom s obzirom na točku A* i označavamo ju s_A.

Pokazat ćemo da za svaki pravac a postoji točno jedna osna simetrija s_a te za svaku točku A postoji točno jedna centralna simetrija s_A.

Primijetite da smo ovdje uveli drugačije definicije, nego što je to uobičajeno u školi ili se koristi na vježbama, ali radi s o istim preslikavanjima što treba znati i obrazložiti.

Teorem 2.3. *Neka je f izometrija.*

(a) Sjecište dvaju različitih fiksnih pravaca od f (ako postoji) je fiksna točka od f.

(b) Spojnica dviju fiksnih točaka od f je fiksni pravac od f. Štoviše, taj je pravac fiksan po točkama.

(c) Ako je f involutorna izometrija, onda točkom koja nije fiksna za f prolazi jedan i samo jedan pravac fiksan za f.

Dokaz.

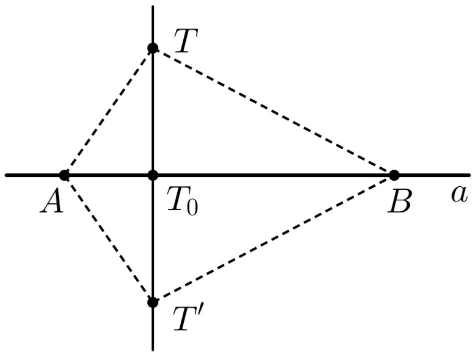
(a) Neka su a, b fiksni pravci, tj. $f(a) = a$, $f(b) = b$ i neka je $C \in a \cap b$. Imamo $C \in a, b$, pa je $f(C) \in f(a), f(b)$, tj. $f(C) \in a, b$. Zato je $f(C) \in a \cap b$ iz čega slijedi $f(C) = C$.

(b) Neka su A, B fiksne točke, tj. $f(A) = A$, $f(B) = B$ i neka je C točka na pravcu AB. Primijetimo da se kružnice $k(A, |AC|)$ i $k(B, |BC|)$ dodiruju u točki C. Kako je $|Af(C)| = |f(A)f(C)| = |AC|$ i $|Bf(C)| = |f(B)f(C)| = |BC|$, vidimo da $f(C)$ leži na obje navedene kružnice, pa je $f(C) = C$. Dakle, pravac AB je fiksan po točkama te je zato fiksan pravac.

(c) Neka je A točka koja nije fiksna za f. Označimo točku $A_1 = f(A)$ i pravac $a = AA_1$. Pravac a prolazi točkama A i A_1, pa pravac $f(a)$ prolazi točkama $f(A) = A_1$ i $f(A_1) = A$ jer zbog involutornosti od f vrijedi $f(A_1) = f(f(A)) = id(A) = A$. Imamo $f(a) = A_1A = a$, pa je a fiksan pravac. Jedinstvenost slijedi iz (a) dijela ovog teorema jer kad bi postojao još jedan fiksan pravac kroz A, točka A bi morala biti fiksna. □

Teorem 2.4. *Jedini fiksni elementi osne simetrije s_a su pravac a, sve točke pravca a i svi pravci okomiti na a.*

Uočimo da je pravac a fiksan po točkama, a pravci okomiti na a nisu fiksni po točkama.



Slika 2.1: Teorem 2.4

Dokaz. Iz definicije je jasno da su a i točke na a fiksne. Želimo sada pokazati da su i okomice na a fiksni pravci. Pri tome ćemo koristiti samo svojstva koja smo dokazali, a ne ono što otprije "znamo" o osnoj simetriji.

Neka je T po volji točka izvan pravca a. Kada bi T bila fiksna točka, onda bi svaki pravac kroz T koji siječe a po Teoremu 2.3.b bio fiksan po točkama. To to bi značilo da su sve točke u ravnini fiksne te dano preslikavanje ne bi moglo biti involutorno jer se u definiciji tog pojma zahtijeva da nije identiteta.

Uzmimo točke $A, B \in a$. Neka je $T' \neq T$ takva da je $|AT| = |AT'|$ i $|BT| = |BT'|$, tj. T' je drugo sjecište kružnica $k(A, |AT|)$ i $k(B, |BT|)$. Slika od T po danoj osnoj simetriji mora ležati na obje kružnice, a budući da smo pokazali da je $s_a(T) \neq T$, slijedi da je $s_a(T) = T'$. Pravac TT' je fiksan po Teoremu 2.3.c, a drugih fiksnih pravaca kroz T nema jer bi inače po Teoremu 2.3.a točka T bila fiksna.

Preostaje još pokazati da je TT' okomito na a. Neka je T_0 sjecište pravaca TT' i a. Točke A i T_0 su fiksne, pa su trokuti AT_0T i AT_0T' sukladni po SSS teoremu. Zato je $\sphericalangle TT_0A = \sphericalangle T'T_0A = 90°$. $\square$

U dokazu prethodnog teorema pokazali smo i da izometrija koja ima tri nekolinearne fiksne točke mora biti identiteta.

Teorem 2.5. *Jedini fiksni elementi centralne simetrije s_A su točka A i svi pravci kroz A.*

Uočimo da pravci kroz A nisu fiksni po točkama.

Dokaz. Očito je da su točka A i pravci kroz A fiksni za s_A. Treba dokazati da nema drugih fiksnih elemenata. Kada bi točka $B \neq A$ bila fiksna, po Teoremu 2.3.b bi sve točke pravca AB bile fiksne, pa bi dano preslikavanje bilo osna simetrija s_{AB}. No, po Teoremu 2.4 nije moguće da svi pravci kroz A budu fiksni za tu osnu simetriju.

Kada bi pravac b koji ne prolazi kroz A bio fiksan, svaka njegova točka T bi po Teoremu 2.3.a bila fiksna jer je sjecište fiksnih pravaca b i AT. Dakle, ovo preslikavanje bi bilo osna simetrija s obzirom na pravac b. No, to nije moguće jer po Teoremu 2.4 znamo da s_b nema fiksnih točaka izvan b dok je očito $A \notin b$ fiksna točka od s_A. $\square$

Teorem 2.6 (Karakterizacija involutornih izometrija)**.** *Svaka involutorna izometrija je ili osna simetrija ili centralna simetrija.*

Dokaz. Neka je f involutorna izometrija i A točka koja nije fiksna te $A' = f(A)$. Prema Teoremu 2.3.c je AA' fiksni pravac. Polovište P dužine $\overline{AA'}$ je fiksna točka za f jer $f(P)$ mora biti na pravcu AA' i vrijedi

$$\begin{aligned} d\big(A', f(P)\big) &= d\big(f(A), f(P)\big) = d(A, P) \\ &= d(A', P) = d\big(f(A), P\big) = d\big(f(f(A)), f(P)\big) = d\big(A, f(P)\big), \end{aligned}$$

pa $f(P)$ mora biti polovište od $\overline{AA'}$, odnosno $f(P) = P$.

Postoje dva slučaja

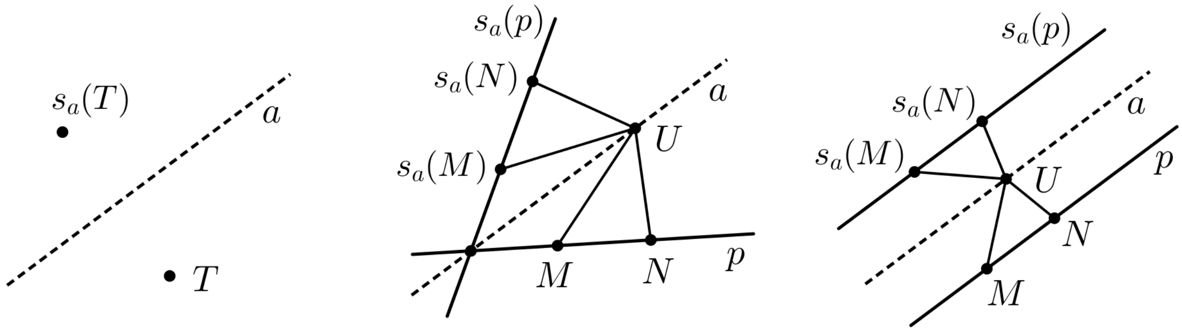
1° Za sve točke A, dužine $\overline{Af(A)}$ imaju isto polovište P. Tada su svi pravci kroz p fiksni, pa je $f = s_P$ centralna simetrija.

2° Među polovištima postoje barem dva različita, npr. $\overline{Af(A)}$ i $\overline{Bf(B)}$ imaju polovišta P, Q tako da je $P \neq Q$. Kako su P i Q fiksne točke, pravac PQ je fiksan po točkama, pa je $f = s_{PQ}$ osna simetrija. $\square$

2.2 Translacije i rotacije

Lema 2.7. *Ako točka T nije fiksna točka osne simetrije s_a, onda je a simetrala dužine $\overline{Ts_a(T)}$. Ako pravac p nije fiksni pravac osne simetrije s_a, onda je a simetrala jednog od kutova koji zatvaraju pravci p i $s_a(p)$ u slučaju da se ti pravci sijeku, odnosno simetrala pruge između pravaca p i $s_a(p)$ u slučaju da su ti pravci paralelni.*

Dokaz. Prva tvrdnja je očita. Za dokaz druge, uzmimo da su M i N točke na pravcu p i U po volji točka na osi a koja ne leži na p. Tada je trokut UMN po SSS teoremu sukladan trokutu $Us_a(M)s_a(N)$, pa su i visine tih trokuta iz vrha U jednake, tj. udaljenost U od pravca p je jednaka udaljenosti U od pravca $s_a(p)$. Iz toga dobivamo i drugu tvrdnju leme. $\square$



Slika 2.2: Lema 2.7

Teorem 2.8. *(a) Ako su a i b različiti pravci, onda je točka $a \cap b$ (ako postoji) jedina fiksna točka izometrije $s_b \circ s_a$.*

(b) Ako su a i b različiti pravci i a nije okomit na b, onda su zajedničke okomice od a i b (ako postoje) jedini fiksni pravci izometrije $s_b \circ s_a$.

Dokaz. (a) Neka je T fiksna točka preslikavanja $s_b \circ s_a$, tj. $T = (s_b \circ s_a)(T)$. Tada je $s_b(T) = (s_b \circ s_b \circ s_a)(T) = s_a(T)$. Označimo $s_b(T) = s_a(T) = T'$. Za $T \neq T'$ bi prema Lemi 2.7 bili pravci a i b simetrale dužine $\overline{TT'}$, pa zato $a = b$. Dakle, mora biti $T' = T$, tj. T je fiksna točka za s_a i za s_b. Prema Teoremu 2.4 je $T \in a$ i $T \in b$, odnosno $T \in a \cap b$. Obratno, ako je $T \in a \cap b$, imamo $(s_b \circ s_a)(T) = s_b\big(s_a(T)\big) = s_b(T) = T$.

(b) Neka je p fiksni pravac od $s_b \circ s_a$, tj. $p = (s_b \circ s_a)(p)$. Tada je $s_b(p) = (s_b \circ s_b \circ s_a)(p) = s_a(p)$. Označimo $s_b(p) = s_a(p) = p'$. Sada primjenimo prethodnu lemu. Ako se p i p' sijeku, onda su pravci a i b simetrale kut(ov)a $\sphericalangle(p, p')$, pa je $a = b$ ili $a \perp b$, a ako su p i p' paralelni, onda je $a = b$. No, te su mogućnosti isključene u uvjetima teorema. Znači da mora biti $p' = p$, tj. $s_a(p) = s_b(p) = p$. Iz karakterizacije fiksnih pravaca osne simetrije imamo četiri mogućnosti:

$p \perp a$, $p \perp b$,

$p = a$, $p \perp b$ što povlači $a \perp b$, a to je isključeno u uvjetima,

$p \perp a$, $p = b$ što povlači $a \perp b$, a to je isključeno u uvjetima,

$p = a$, $p = b$ iz čega je $a = b$ što je također isključeno u uvjetima teorema.

Dakle, mora biti $p \perp a$ i $p \perp b$ te zato $a \parallel b$.

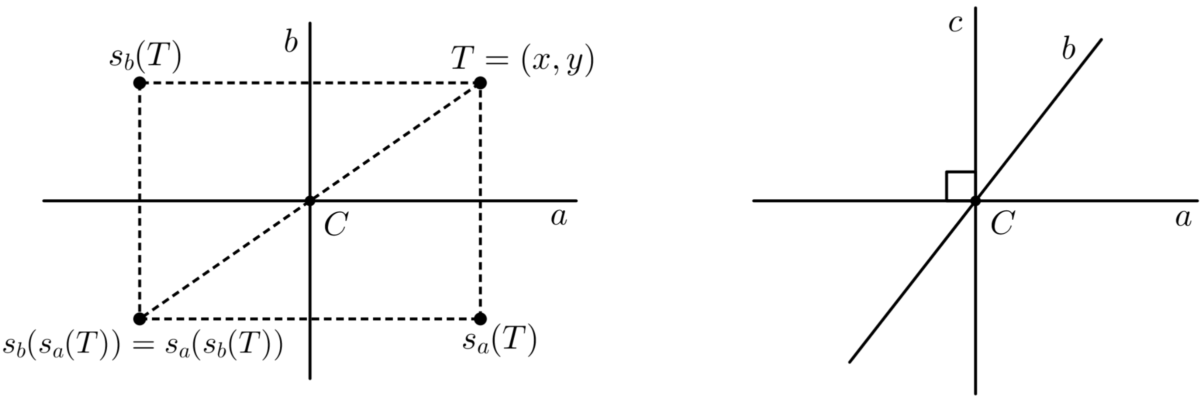
Obratno, ako je $p \perp a$, $p \perp b$, onda je $(s_b \circ s_a)(p) = s_b\big(s_a(p)\big) = s_b(p) = p$, pri čemu smo opet koristili Teorem 2.4. □

Teorem 2.9. *(a) Ako su a i b okomiti pravci sa sjecištem C, onda vrijedi $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a = s_C$.*

(b) Iz $s_a \circ s_b = s_C$ uz $a \neq b$, slijedi $C \in a \cap b$ i $a \perp b$.

Dokaz. (a) Uzmimo pravce a i b za koordinatne osi Kartezijevog koordinatnog sustava. Tada je C ishodište. Ako je (x, y) bilo koja točka, tada je

$$s_b(x, y) = (-x, y), \quad s_a(x, y) = (x, -y), \quad s_C(x, y) = (-x, -y).$$



Slika 2.3: Teorem 2.9

Zato imamo

$$
\begin{aligned}
(s_a \circ s_b)(x, y) &= s_a(s_b(x, y)) = s_a(-x, y) = (-x, -y) \qquad \text{i} \\
(s_b \circ s_a)(x, y) &= s_b(s_a(x, y)) = s_b(x, -y) = (-x, -y),
\end{aligned}
$$

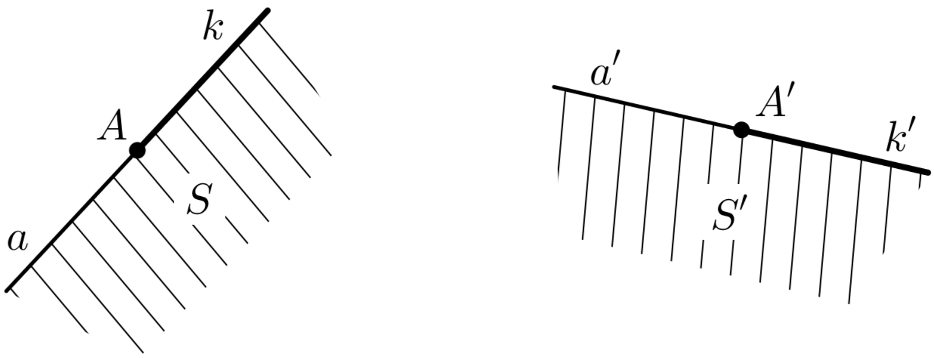
tj. $(s_a \circ s_b)(x, y) = (s_b \circ s_a)(x, y) = s_C(x, y)$. Kako to vrijedi za svaku točku ravnine, nužno je $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a = s_C$.

(b) Prema Teoremu 2.8.a, ako postoji, jedina fiksna točka izometrije $s_a \circ s_b$ je u sjecištu $a \cap b$. Prema Teoremu 2.5 jedina fiksna točka od s_C je C. Zaključujemo da je $C \in a \cap b$.

Neka je c okomica na a kroz C. Prema (a) imamo $s_a \circ s_c = s_C$, pa slijedi $s_a \circ s_c = s_a \circ s_b$, tj. $s_c = s_b$ jer je s_a bijekcija. Jedine fiksne točke od s_c su točke pravca c dok su jedine fiksne točke od s_b točke pravca b, pa je nužno $c = b$. Dakle, imamo $a \perp b$. $\square$

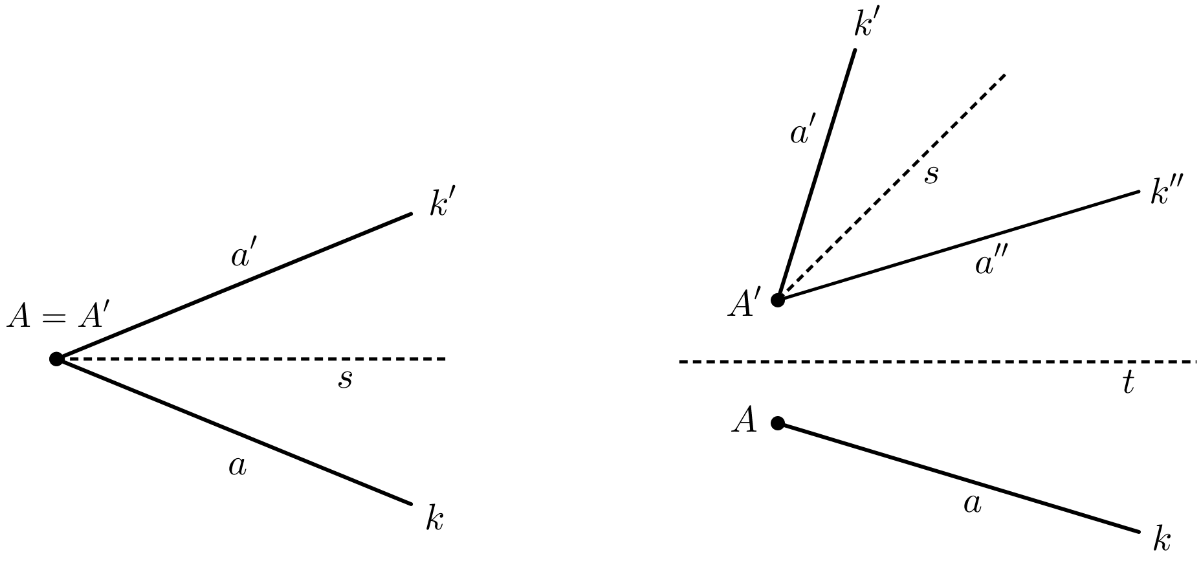
U nastavku će nam trebati sljedeći aksiom.

Aksiom. Neka su dane točke A, A', pravci a, a' kroz A, A' tim redom, polupravci k, k' tih pravaca s počecima A, A' i poluravnine S, S' određene pravcima a, a'. Tada postoji jedna i samo jedna izometrija koja preslikava A u A', a u a', k u k', S u S'.



Slika 2.4: Ilustracija aksioma o izometrijama

Teorem 2.10. *Svaka izometrija se može prikazati kao kompozicija od najviše tri osne simetrije.*



Slika 2.5: Teorem 2.10, dva slučaja u dokazu

Dokaz. Neka je dana izometrija f. Uzmimo po volji točku A, pravac a kroz nju, polupravac k pravca a s početkom A i poluravninu S određenu pravcem a. Neka je $A' = f(A)$, $a' = f(a)$, $k' = f(k)$, $S' = f(S)$.

Ako je $A = A'$, onda neka je s simetrala kuta $\sphericalangle(k, k')$. Tada je $s_s(A) = A = A'$, $s_s(a) = a'$, $s_s(k) = k'$. Ako je $s_s(S) = S'$, onda je $f = s_s$ zbog navedenog aksioma. Ako je pak $s_s(S) = S'_1$, gdje je S'_1 druga poluravnina određena pravcem a', onda je $f = s_{a'} \circ s_s$ jer je $(s_{a'} \circ s_s)(A) = s_{a'}(A) = A = A'$, $(s_{a'} \circ s_s)(a) = s_{a'}(a') = a'$, $(s_{a'} \circ s_s)(k) = s_{a'}(k') = k'$, $(s_{a'} \circ s_s)(S) = s_{a'}(S'_1) = S'$.

Pretpostavimo sada da je $A \neq A'$. Neka je t simetrala dužine $\overline{AA'}$. Tada s_t preslikava točku A u točku A', pravac a' u neki pravca a'' kroz A', polupravac k u neki polupravac k'' pravca a'' s početkom A'. Neka je s simetrala kuta $\sphericalangle(k'', k')$. Tada je $(s_s \circ s_t)(A) = s_s(A') = A'$, $(s_s \circ s_t)(a) = s_s(a'') = a'$, $(s_s \circ s_t)(k) = s_s(k'') = k'$. Ako je $(s_s \circ s_t)(S) = S'$, onda je $f = s_s \circ s_t$. Ako je pak $(s_s \circ s_t)(S) = S'_1$, gdje je S'_1 druga poluravnina određena pravcem a', onda je $f = s_{a'} \circ s_s \circ s_t$ jer je $(s_{a'} \circ s_s \circ s_t)(A) = (s_{a'} \circ s_s)(A') = s_{a'}(A') = A'$, $(s_{a'} \circ s_s \circ s_t)(a) = (s_{a'} \circ s_s)(a'') = s_{a'}(a') = a'$, $(s_{a'} \circ s_s \circ s_t)(k) = (s_{a'} \circ s_s)(k'') = s_{a'}(k') = k'$, $(s_{a'} \circ s_s \circ s_t)(S) = s_{a'}\big((s_s \circ s_t)(S)\big) = s_{a'}(S'_1) = S'$. □

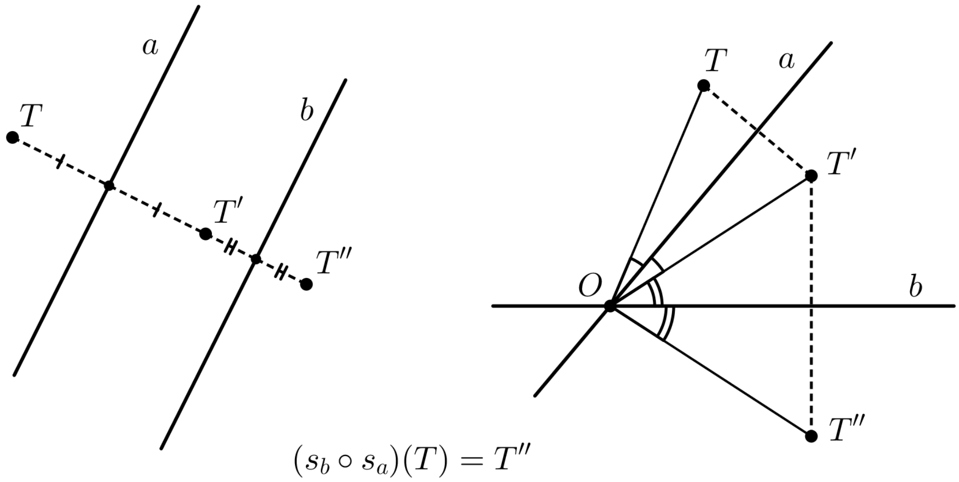
Teorem 2.11. *Jednakost oblika $s_a \circ s_b \circ s_c = id$, gdje je id identiteta, je nemoguća.*

Dokaz. Jednakost $s_a \circ s_b \circ s_c = id$ je zbog involutornosti od s_c ekvivalentna sa $s_a \circ s_b = s_c$. Ako je $a = b$, onda jednakost glasi $id = s_c$ što očito nije moguće. Ako je $a \neq b$, iz Teorema 2.8 slijedi da je $a \cap b$ jedina fiksna točka od $s_a \circ s_b$, dok iz Teorema 2.4 imamo da je skup fiksnih točaka od s_c čitav pravac c. Budući su im skupovi fiksnih točaka različiti, ni navedene izometrije se ne mogu podudarati. □

Sada ćemo definirati dva važna tipa izometrija. Izometrija koja se može prikazati kao kompozicija dviju osnih simetrija zove se

translacija ako su osi tih simetrija paralelne,

rotacija oko točke O ako se osi tih simetrija sijeku u točki O (točku O zovemo centar rotacije)



Slika 2.6: Ilustracija uz definiciju translacije i rotacije

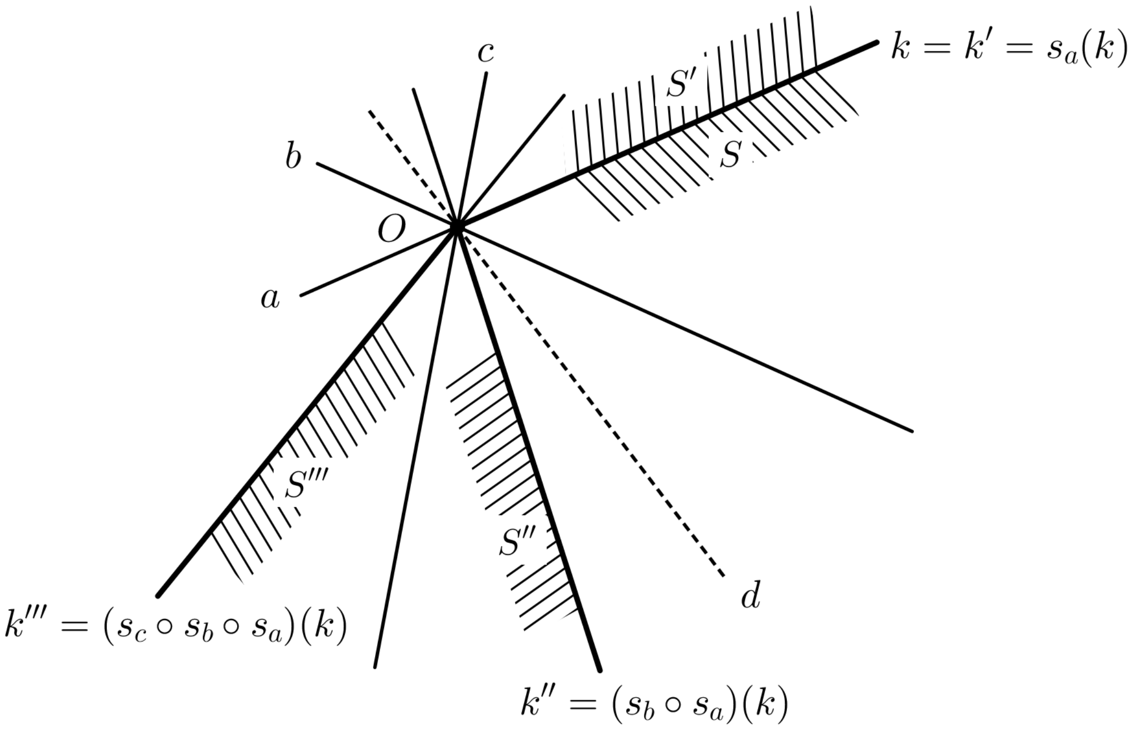
Pri translaciji $s_b \circ s_a$ se svaka točka T translatira za dvostruku orijentiranu udaljenost pravaca a, b u smjeru okomitom na te pravce.

Pri rotaciji $s_b \circ s_a$ oko točke O se svaka točka T rotira oko O za kut $2\sphericalangle(a, b)$. Specijalno, i centralna simetrija s_O je rotacija oko O za kut $180°$.

Prikaz rotacije i translacije u obliku kompozicije dviju osnih simetrija nije jednoznačan. To je sadržaj sljedećeg teorema.

Teorem 2.12 (Teorem o tri simetrije)**.** *(a) Ako su a, b, c pravci kroz točku O, onda postoji pravac d kroz O takav da je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$.*

(b) Ako su a, b, c pravci okomiti na pravac g (dakle, međusobno paralelni), onda postoji pravac d okomit na g takav da je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$.



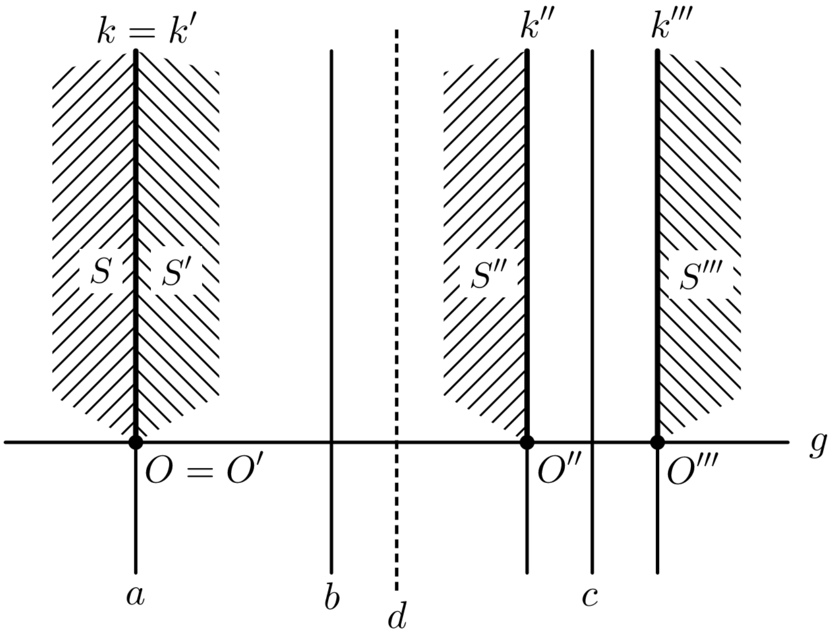
Slika 2.7: Dokaz Teorema 2.12, dio (a)

Dokaz. (a) Neka je k polupravac pravca a s početkom O te S jedna poluravnina određena tim pravcem. Na Slici 2.7 je naznačeno djelovanje kompozicije osnih simetrija $s_c \circ s_b \circ s_a$ na ove elemente tako da je

$$\begin{array}{ccc} s_a(O) = O & (s_b \circ s_a)(O) = O & (s_c \circ s_b \circ s_a)(O) = O \\ s_a(a) = a & (s_b \circ s_a)(a) = a'' & (s_c \circ s_b \circ s_a)(a) = a''' \\ s_a(k) = k & (s_b \circ s_a)(k) = k'' & (s_c \circ s_b \circ s_a)(k) = k''' \\ s_a(S) = S' & (s_b \circ s_a)(S) = S'' & (s_c \circ s_b \circ s_a)(S) = S''' \end{array}$$

Neka je d simetrala kuta $\sphericalangle(k, k''')$. Tada je $s_d(O) = O$, $s_d(a) = a'''$ i $s_d(k) = k'''$. Ako je još $s_d(S) = S'''$, iz aksioma slijedi da je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$. Pretpostavimo da je $s_d(S') = S'''$. Tada bi bilo $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d \circ s_a$, tj. $s_c \circ s_b = s_d$ ili $s_c \circ s_b \circ s_d = id$ što je nemoguće zbog Teorema 2.11.

(b) Analogno prethodnom dijelu teorema, ovdje dobivamo da je d simetrala para pravaca a, a''', odnosno simetrala dužine kojoj su krajnje točke O i $O''' = (s_c \circ s_b \circ s_a)(O)$. □



Slika 2.8: Dokaz Teorema 2.12, dio (b)

Vrijedi i obrat prethodnog teorema.

Teorem 2.13. *(a) Ako su a, b različiti pravci kroz točku O i c, d pravci takvi da je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$, onda i pravci c i d prolaze točkom O.*

(b) Ako su a, b različiti pravci okomiti na pravac g i c, d pravci takvi da je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$, onda su i pravci c i d okomiti na g.

Dokaz. Iz $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$ slijedi $s_b \circ s_a = s_c \circ s_d$, a tada zbog $a \neq b$ imamo $c \neq d$.

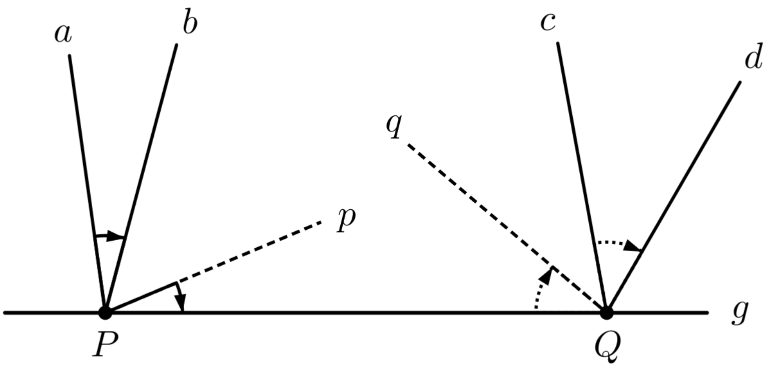
(a) Prema Teoremu 2.8.a je O fiksna točka od $s_b \circ s_a$, pa zato i fiksna točka od $s_c \circ s_d$ iz čega slijedi da je $O \in c \cap d$.

(b) Prema Teoremu 2.8.b zbog $a \perp g$ i $b \perp g$ imamo da je g fiksni pravac za $s_b \circ s_a$, pa zato i fiksni pravac za $s_c \circ s_d$ iz čega slijedi da su c i d okomiti na g. □

Iz Teorema 2.12 i 2.13 odmah dobivamo idući teorem.

Teorem 2.14. *Kompozicija triju osnih simetrija je opet osna simetrija ako i samo ako osi tih simetrija pripadaju jednom* pramenu*, tj. prolaze istom točkom ili su okomiti na isti pravac.*

Teorem 2.15. *Kompozicija dviju rotacija je ili rotacija ili translacija.*



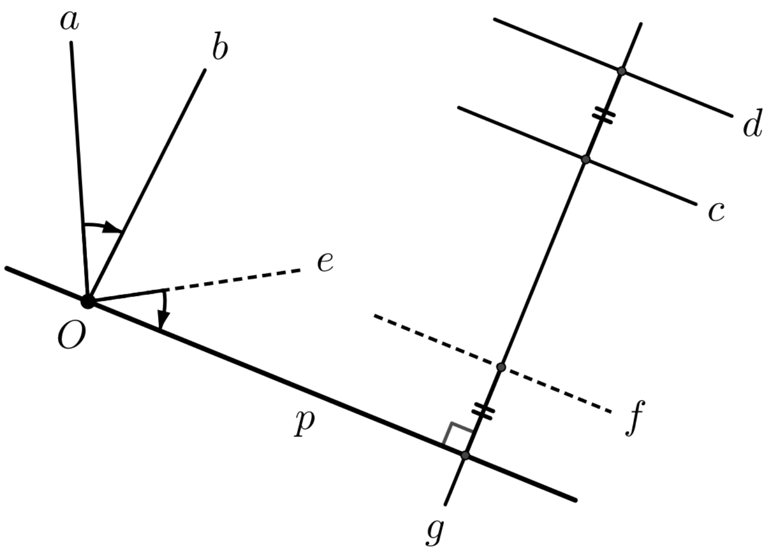
Slika 2.9: Teorem 2.15

Dokaz. Neka su $s_b \circ s_a$ i $s_d \circ s_c$ dane rotacije oko točaka $P \in a \cap b$ i $Q \in c \cap d$. Ako je $P = Q$, onda je po Teoremu 2.12.a kompozicija tih rotacija također rotacija oko iste točke. Naime, u $s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a$ tri uzastopne osne simetrije daju u kompoziciji jednu simetriju s obzirom na pravac koji prolazi točkom $P = Q$.

Ako su P i Q različite točke, označimo njihovu spojnicu s g. Prema Teoremu 2.12.a postoji pravac p kroz točku P i pravac q kroz Q tako da je $s_g \circ s_b \circ s_a = s_p$ i $s_d \circ s_c \circ s_g = s_q$. Tada je $s_b \circ s_a = s_g \circ s_p$ i $s_d \circ s_c = s_q \circ s_g$. Zato je $(s_d \circ s_c) \circ (s_b \circ s_a) = (s_q \circ s_g) \circ (s_g \circ s_p) = s_q \circ (s_g \circ s_g) \circ s_p = s_q \circ s_p$ što je ili rotacija ili translacija. □

Zadatak 2.1. Kada je kompozicija dviju rotacija translacija?

Teorem 2.16. *Kompozicija translacije i rotacije različite od identitete je rotacija.*

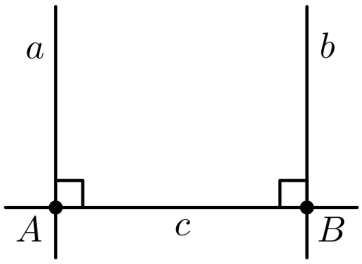


Slika 2.10: Teorem 2.16

Dokaz. Neka je $s_b \circ s_a$ rotacija oko točke O ($a \neq b$) i $s_d \circ s_c$ translacija uzduž pravca g. Neka je p okomica iz O na g. Tada prema Teoremu 2.12 postoje pravci e, f takvi da e prolazi kroz O, a f je okomit na g te da je $s_p \circ s_b \circ s_a = s_e$ i $s_d \circ s_c \circ s_p = s_f$, tj. $s_b \circ s_a = s_p \circ s_e$ i $s_d \circ s_c = s_f \circ s_p$. Zato je $(s_d \circ s_c) \circ (s_b \circ s_a) = (s_f \circ s_p) \circ (s_p \circ s_e) = s_f \circ (s_p \circ s_p) \circ s_e = s_f \circ s_e$. Iz $a \neq b$ zbog $s_b \circ s_a = s_p \circ s_e$ slijedi $e \neq p$, pa iz $p \parallel f$ slijedi $e \nparallel f$, tj. $s_f \circ s_e$ je rotacija. Analogno se pokaže i slučaj kompozicije kad prvo primijenimo translaciju, a zatim rotaciju. $\square$

2.3 Translacije i centralne simetrije

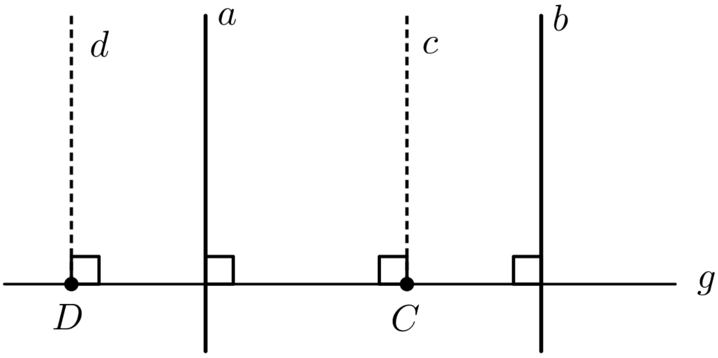
Teorem 2.17. *Kompozicija dviju centralnih simetrija s centrima A, B je translacija uzduž pravca AB za vektor $2\overrightarrow{AB}$.*



Slika 2.11: Teorem 2.17

Dokaz. Neka je c pravac AB i a, b okomice na c u točkama A, B. Prema Teoremu 2.9.a vrijedi $s_c \circ s_a = s_A$, $s_b \circ s_c = s_B$, pa je $s_B \circ s_A = (s_b \circ s_c) \circ (s_c \circ s_a) = s_b \circ (s_c \circ s_c) \circ s_a = s_b \circ s_a$, što je zbog $a \parallel b$ translacija uzduž c za vektor $2\overrightarrow{AB}$. $\square$

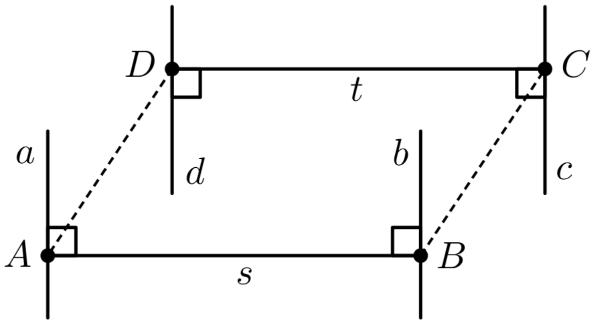
Teorem 2.18. *Ako je dana translacija $s_b \circ s_a$ i točka C, tada postoji točka D takva da je $s_b \circ s_a = s_C \circ s_D$.*



Slika 2.12: Teorem 2.18

Dokaz. Neka je g pravac kroz C okomit na a i b, a c pravac kroz C okomit na g. Prema Teoremu 2.12.b postoji pravac d okomit na g takav da je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$, tj. $s_b \circ s_a = s_c \circ s_d$. Neka je točka $D \in d \cap g$. Tada je $s_c \circ s_g = s_C$, $s_g \circ s_d = s_D$, pa je $s_b \circ s_a = s_c \circ s_d = (s_c \circ s_g) \circ (s_g \circ s_d) = s_C \circ s_D$. $\square$

Teorem 2.19. *Kompozicija triju centralnih simetrija s centrima A, B, C je opet centralna simetrija s centrom D takvim da je $ABCD$ paralelogram (pravi ili degenerirani).*



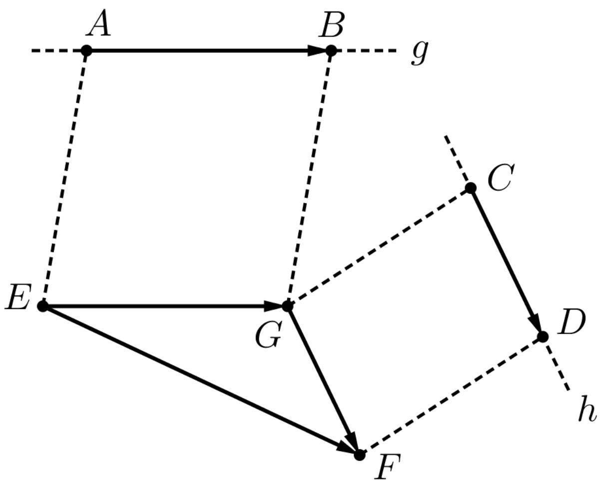
Slika 2.13: Teorem 2.19

Dokaz. Neka je s pravac AB, neka su a, b, c okomice kroz A, B, C na pravac s i neka je t okomica u C na c. Prema Teoremu 2.12.b postoji pravac d okomit na s takav da je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$. Prema Teoremu 2.9.a imamo $s_s \circ s_a = s_A$, $s_b \circ s_s = s_B$, $s_t \circ s_c = s_C$, $s_t \circ s_d = s_D$, gdje je $D \in d \cap t$ jer je i $d \perp t$. Zato je $s_C \circ s_B \circ s_A = s_t \circ s_c \circ s_b \circ s_s \circ s_s \circ s_a = s_t \circ s_c \circ s_b \circ s_a = s_t \circ s_d = s_D$. Budući da su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne i jednakih duljina, vidimo da je $ABCD$ paralelogram. $\square$

Ako u dokazu prethodnog teorema uzmemo da je $C \in s$, onda je $t = s$, pa je $D \in s$. Zato vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 2.20. *Kompozicija centralnih simetrija s obzirom na tri točke jednog pravca je centralna simetrija s obzirom na jednu točku istog pravca.*

Teorem 2.21. *Kompozicija dviju translacija je opet translacija.*



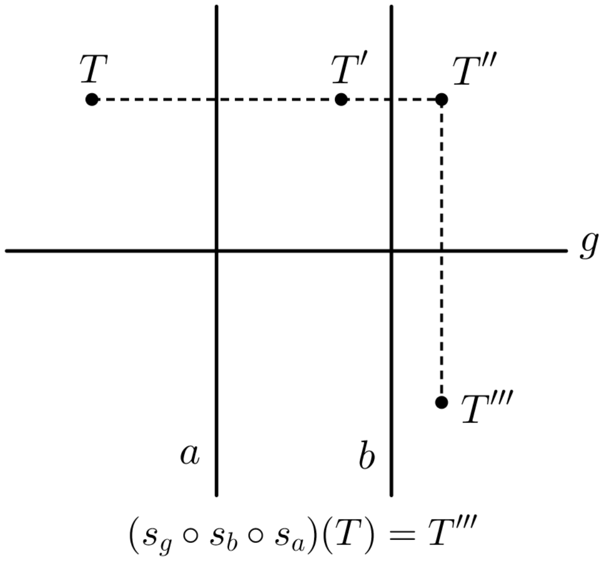
Slika 2.14: Teorem 2.21

Dokaz. Neka su $s_b \circ s_a$, $s_d \circ s_c$ dane translacije uzduž pravaca g, h. Neka je $A \in a \cap g$, $B \in b \cap g$, $C \in c \cap h$, $D \in d \cap h$. Prema Teoremu 2.9.a imamo $s_A = s_g \circ s_a$, $s_B = s_b \circ s_g$, $s_C = s_h \circ s_c$, $s_D = s_d \circ s_h$, pa je $s_b \circ s_a = s_b \circ s_g \circ s_g \circ s_a = s_B \circ s_A$ i $s_d \circ s_c = s_d \circ s_h \circ s_h \circ s_c = s_D \circ s_C$. Neka je G bilo koja točka. Tada prema Teoremu 2.19 postoje točke E, F takve da je $s_G \circ s_B \circ s_A = s_E$ i $s_D \circ s_C \circ s_G = s_F$, tj. $s_B \circ s_A = s_G \circ s_E$ i $s_D \circ s_C = s_F \circ s_G$. Zato je $(s_d \circ s_c) \circ (s_b \circ s_a) = (s_D \circ s_C) \circ (s_B \circ s_A) = s_F \circ s_G \circ s_G \circ s_E = s_F \circ s_E$, a to je po Teoremu 2.17 opet translacija. Na Slici 2.14 koja ilustrira ovaj dokaz prikazane su polovine odgovarajućih vektora translacija. $\square$

2.4 Klizne simetrije

Izometriju koja se može prikazati u obliku $s_g \circ s_b \circ s_a$ gdje je g pravac okomit na pravce a i b, zovemo *kliznom simetrijom* s osi g.

Kako je $a \parallel b$, to je $s_b \circ s_a$ translacija uzduž pravca g te je klizna simetrija s osi g kompozicija jedne translacije uzduž g i simetrije s obzirom na g. Ako je $a = b$, onda je $s_g \circ s_b \circ s_a = s_g$, pa je osna simetrija poseban slučaj klizne simetrije.



Slika 2.15: Ilustracija uz definiciju klizne simetrije

Teorem 2.22. *Klizna simetrija s osi g koja nije osna simetrija, nema fiksnih točaka, a jedini fiksni pravac joj je pravac g.*

Dokaz. Neka je $s_g \circ s_b \circ s_a$ dana klizna simetrija s $a \neq b$. Tada je $a \perp g$ i $b \perp g$. Prema Teoremu 2.4 imamo $s_a(g) = g$, $s_b(g) = g$, $s_g(g) = g$, pa je $(s_g \circ s_b \circ s_a)(g) = g$, tj. g je fiksni pravac za danu kliznu simetriju.

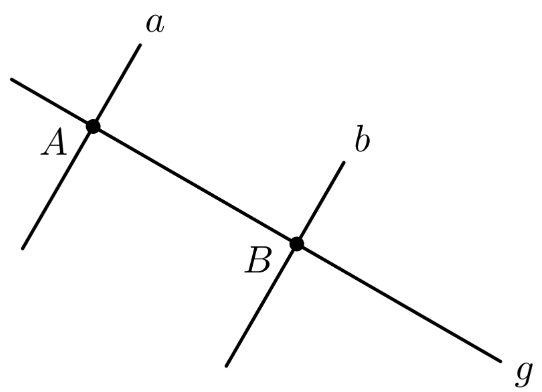
Točke pravca g ne mogu biti fiksne za $s_g \circ s_b \circ s_a$. Doista, neka je $P \in g$ te $(s_b \circ s_a)(P) = P'$. Prema Teoremu 2.8 zbog $a \parallel b$ i $a \neq b$, slijedi da je $P \neq P'$. Kako je $P \in g$ i $(s_b \circ s_a)(g) = g$, imamo $P' \in g$, pa je $s_g(P') = P'$. Zato je $(s_g \circ s_b \circ s_a)(P) = s_g(P') = P' \neq P$.

Pravci okomiti na pravce a, b i različiti od g ne mogu biti fiksni za $s_g \circ s_b \circ s_a$. Doista, neka je $p \perp a, b$ i $p \neq g$. Prema Teoremu 2.8 vrijedi $(s_b \circ s_a)(p) = s_b(p) = p$, a prema Teoremu 2.4 je $s_g(p) \neq p$, pa je zato $(s_g \circ s_b \circ s_a)(p) = s_g(p) \neq p$.

Pravci koji sijeku g ne mogu biti fiksni za $s_g \circ s_b \circ s_a$. Doista, neka je p pravac koji siječe pravac g u točki P. Kada bi bilo $(s_g \circ s_b \circ s_a)(p) = p$, tada bi zbog $(s_g \circ s_b \circ s_a)(g) = g$ prema Teoremu 2.3 slijedilo $(s_g \circ s_b \circ s_a)(P) = P$ jer je $P \in p \cap g$. No, to je nemoguće jer je $P \in g$. Dakle, g je jedini fiksni pravac izometrije $s_g \circ s_b \circ s_a$.

Neka je sada P bilo koja točka. Neka je p okomica iz P na g. Točka P nije fiksna za $s_g \circ s_b \circ s_a$ jer bi inače iz $P \in p$ i $p \perp g$ slijedilo $(s_g \circ s_b \circ s_a)(P) \in (s_g \circ s_b \circ s_a)(p)$ i $(s_g \circ s_b \circ s_a)(p) \perp (s_g \circ s_b \circ s_a)(g)$, tj. $P \in (s_g \circ s_b \circ s_a)(p)$ i $(s_g \circ s_b \circ s_a)(p) \perp g$, pa bi $(s_g \circ s_b \circ s_a)(p)$ bila okomica iz P na g, tj. $(s_g \circ s_b \circ s_a)(p) = p$ što je prema već dokazanom nemoguće. $\square$

Teorem 2.23. *Izometrija je klizna simetrija ako i samo ako se može predočiti kao kompozicija jedne osne i jedne centralne simetrije ili jedne centralne i jedne osne simetrije.*



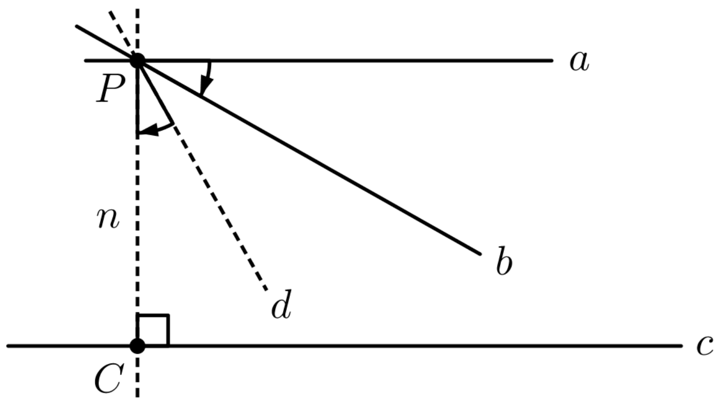
Slika 2.16: Teorem 2.23

Dokaz. Neka je dana klizna simetrija $s_g \circ s_b \circ s_a$, gdje je $a, b \perp g$. Neka je $A \in a \cap g$ i $B \in b \cap g$. Tada prema Teoremu 2.9 vrijedi $s_g \circ s_a = s_A$ i $s_g \circ s_b = s_b \circ s_g = s_B$, pa dobivamo $s_g \circ s_b \circ s_a = s_B \circ s_a$ i $s_g \circ s_b \circ s_a = s_b \circ s_g \circ s_a = s_b \circ s_A$.

Obratno, neka je dana izometrija $s_B \circ s_a$. Neka je g okomica iz B na a te b okomica na g u točki B. Tada je $a, b \perp g$, a prema Teoremu 2.9 je $s_g \circ s_b = s_B$, pa slijedi $s_B \circ s_a = s_g \circ s_b \circ s_a$, tj. $s_B \circ s_a$ je klizna simetrija s osi g jer je $a, b \perp g$.

Analogno, ako je dana izometrija $s_b \circ s_A$, onda neka je g okomica iz A na b te a okomica na g u točki A. Imamo $s_g \circ s_a = s_A$ i $s_b \circ s_g = s_g \circ s_b$, pa zato $s_b \circ s_A = s_b \circ s_g \circ s_a = s_g \circ s_b \circ s_a$. □

Teorem 2.24. *Svaka kompozicija triju osnih simetrija je klizna simetrija.*



Slika 2.17: Teorem 2.24

Dokaz. Neka je dana kompozicija $s_c \circ s_b \circ s_a$. Ako su pravci a, b, c okomiti na isti pravac p, onda prema Teoremu 2.12 postoji pravac g takav da je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_g$, gdje je $g \perp p$. Dakle, $s_c \circ s_b \circ s_a$ je osna simetrija s obzirom na g, a to je klizna simetrija s osi g.

Pretpostavimo sada da sva tri pravca a, b, c nemaju zajedničku okomicu. Neka je npr. $P \in a \cap b$. Neka je n okomica iz P na c i $C \in c \cap n$. Prema Teoremu 2.12 postoji pravac d kroz točku P takav da je $s_n \circ s_b \circ s_a = s_d$, tj. $s_b \circ s_a = s_n \circ s_d$. zato je $s_c \circ s_b \circ s_a = s_c \circ s_n \circ s_d = s_C \circ s_d$ jer je $s_c \circ s_n = s_C$. Tvrdnja sada slijedi iz prethodnog teorema. Ako je $a \parallel b$, tada se pravci b i c sigurno sijeku i dokaz se provodi analogno. □

Prema Teoremu 2.10 svaka izometrija se može prikazati kao kompozicija od najviše tri osne simetrije. Kompozicija dviju osnih simetrija je ili translacija ili rotacija (ili specijalno identiteta). Prema prethodnom teoremu kompozicija triju osnih simetrija je klizna simetrija (ili specijalno osna simetrija). Zato vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 2.25. *Svaka izometrija je ili translacija ili rotacija ili klizna simetrija. Pritom je jedino identiteta istodobno i translacija i rotacija.*

2.5 Grupa izometrija euklidske ravnine i neke njezine podgrupe

Teorem 2.26. *Kompozicija osnih simetrija može biti identiteta samo ako je broj funkcija u toj kompoziciji paran.*

Dokaz. Neka je $s_{a_n} \circ \cdots \circ s_{a_2} \circ s_{a_1} = id$. Pretpostavimo da je n neparan broj. Tada je očito $n \neq 1$, a prema Teoremu 2.11 je $n \neq 3$. Zato je $n \geqslant 5$. Promatrajmo sada kompoziciju $s_{a_5} \circ s_{a_4} \circ s_{a_3} \circ s_{a_2} \circ s_{a_1}$. Prema Teoremu 2.24 je $s_{a_3} \circ s_{a_2} \circ s_{a_1}$ klizna simetrija koja se zbog Teorema 2.23 može predočiti u obliku $s_b \circ s_B$. Zato je $s_{a_5} \circ s_{a_4} \circ s_{a_3} \circ s_{a_2} \circ s_{a_1} = s_{a_5} \circ s_{a_4} \circ s_b \circ s_B$. Analogno se i $s_{a_5} \circ s_{a_4} \circ s_b$ može predočiti u obliku $s_c \circ s_C$, pa je $s_{a_5} \circ s_{a_4} \circ s_{a_3} \circ s_{a_2} \circ s_{a_1} = s_c \circ s_C \circ s_B$. Prema Teoremu 2.17 je $s_C \circ s_B$ translacija, pa se može predočiti u obliku $s_e \circ s_d$. Dakle, imamo $s_{a_5} \circ s_{a_4} \circ s_{a_3} \circ s_{a_2} \circ s_{a_1} = s_c \circ s_e \circ s_d$, tj. svaka kompozicija pet osnih simetrija može se prikazati u obliku kompozicije triju osnih simetrija. Ponavljanjem ovog postupka slijedi da je kompozicija $s_{a_n} \circ \cdots \circ s_{a_2} \circ s_{a_1}$ jednaka kompoziciji $n-2$, pa onda $n-4$, ..., pa onda 5 i konačno 3 osne simetrije. Ovo posljednje je u kontradikciji s Teoremom 2.11. Zato je n paran broj. □

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi idući.

Teorem 2.27. *Ako se neka izometrija može na dva načina prikazati kao kompozicija osnih simetrija, onda oba prikaza imaju istodobno ili paran ili neparan broj funkcija.*

Ovaj teorem omogućava sljedeću definiciju. Kompoziciju parnog broja osnih simetrija zovemo *direktnom izometrijom* ili *gibanjem*, a kompoziciju neparnog broja osnih simetrija zovemo *indirektnom izometrijom.* Naziv direktna ili indirektna izometrija potječe iz činjenice da te izometrije čuvaju, odnosno mijenjaju orijentaciju ravnine.

Na temelju Teorema 2.25 zaključujemo da je svako gibanje ili translacija ili rotacija, a samo je identiteta i translacija i rotacija. Također vidimo da je svaka indirektna izometrija klizna simetrija ili specijalno osna simetrija.

Iz definicije direktnih i indirektnih izometrija slijedi odmah da je kompozicija dvaju gibanja opet gibanje, da je kompozicija dviju indirektnih izometrija gibanje i da je kompozicija gibanja i indirektne izometrije (u bilo kojem od dva poretka) indirektna izometrija. Zato vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.28. *Gibanja tvore podgrupu grupe izometrija.*

Imamo i iduće teoreme koje nije teško pokazati pomoću dosad dokazanih rezultata o izometrijama.

Teorem 2.29. *Rotacije oko čvrste točke O tvore komutativnu grupu, podgrupu grupe izometrija.*

Teorem 2.30. *Rotacije oko točke O i simetrije s obzirom na pravce kroz O tvore grupu.*

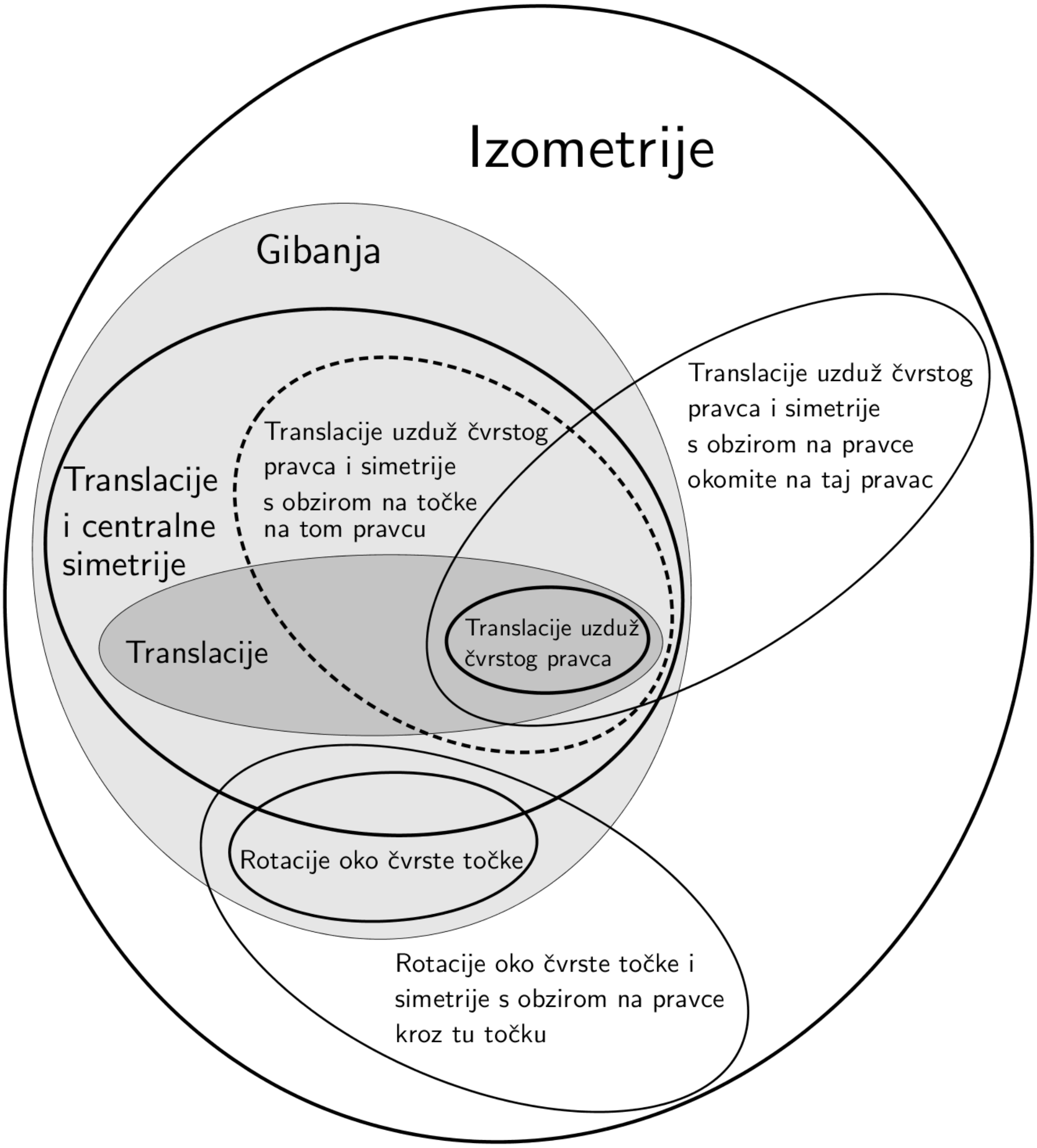
Teorem 2.31. *Translacije uzduž čvrstog pravca g tvore komutativnu grupu.*

Teorem 2.32. *Translacije uzduž pravca g i simetrije s obzirom na pravce okomite na g tvore grupu.*

Teorem 2.33. *Translacije uzduž pravca g i simetrije s obzirom na točke pravca g tvore grupu.*

Teorem 2.34. *Sve translacije tvore komutativnu grupu.*

Teorem 2.35. *Sve translacije i sve centralne simetrije tvore grupu.*



Slika 2.18: Shematski prikaz nekih podgrupa grupe izometrija u ravnini

Poglavlje 3

Homotetija i inverzija

3.1 Homotetija

Dana je točka O i neki realan broj $k \neq 0$. *Homotetijom* s centrom O i s koeficijentom k zovemo preslikavanje skupa točaka ravnine na sebe tako da vrijedi $O \mapsto O$ i za svaku točku $T \neq O$ imamo $T \mapsto T'$, gdje su točke T, T', O kolinearne te za orijentirane duljine dužina OT, OT' vrijedi $\dfrac{OT'}{OT} = k$.

Za $|k| > 1$ homotetiju zovemo *rastezanje* (dilatacija), a za $|k| < 1$ *stezanje* (kontrakcija). Za $k = 1$ imamo identitetu, a za $k = -1$ centralnu simetriju s centrom O.

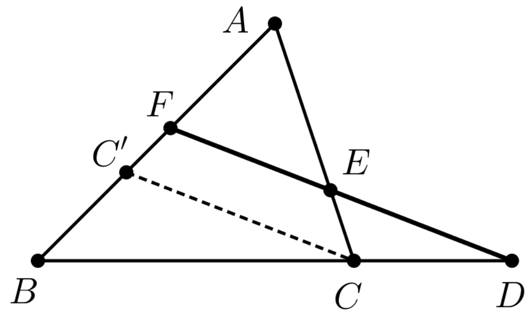
Homotetija je specijalan slučaj sličnosti jer su lik $\mathcal{L}$ i njegova slika $\mathcal{L}'$ slični. Omjer sličnosti likova $\mathcal{L}'$ i $\mathcal{L}$ je $|k|$. Zato se površine likova $\mathcal{L}'$ i $\mathcal{L}$ odnose kao $k^2 : 1$.

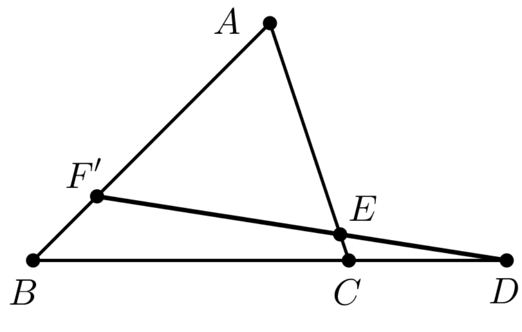
Homotetija preslikava točke u točke, pravac u s njim paralelan pravac, dužinu u dužinu, kružnicu u kružnicu itd.

Zadatak 3.1. Dokažite tvrdnje navedene u zadnjoj rečenici.

Lema 3.1 (Menelajev teorem)**.** *Neka su D, E, F točke na pravcima BC, CA, AB, gdje je ABC trokut. Točke D, E, F su kolinearne ako i samo ako za orijentirane duljine vrijedi*

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1. \tag{3.1}$$





Slika 3.1: Lema 3.1, ilustracije za oba smjera u dokazu

Dokaz. Neka su D, E, F kolinearne točke i neka paralela s pravcem DE kroz točku C siječe AB u točki C'. Tada imamo

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{C'F}{AF} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{C'F}{BF} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} = 1.$$

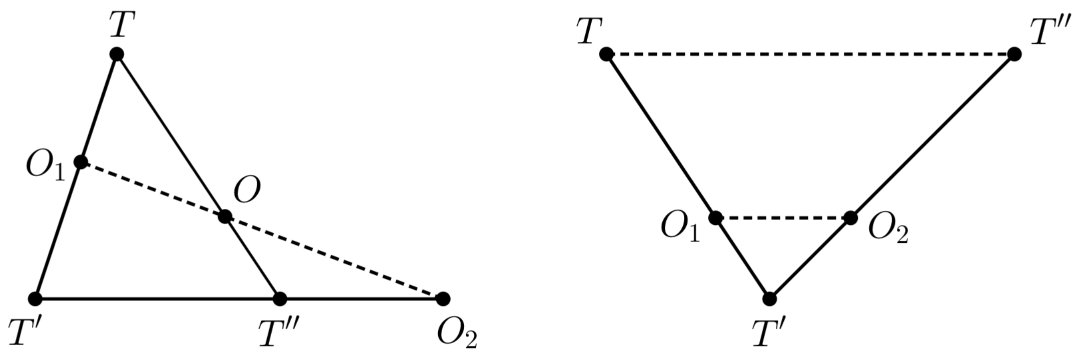
Obratno, neka vrijedi jednakost (3.1) i neka je F' točka u kojoj se sijeku pravci DE i AB. Tada prema prvom dijelu leme slijedi

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF'}{BF'} = 1. \tag{3.2}$$

Iz (3.1) i (3.2) slijedi $\frac{AF'}{BF'} = \frac{AF}{BF}$, tj. $(AF + FF') \cdot BF = AF \cdot (BF + FF')$ ili dalje redom $FF' \cdot BF = FF' \cdot AF$, $FF' \cdot (AF - BF) = 0$, $FF' \cdot AB = 0$. Kako je $AB \neq 0$, to je nužno $FF' = 0$, tj. $F' = F$, pa je F na pravcu DE. □

Teorem 3.2. *Ako je $k_1 k_2 \neq 1$, tada je kompozicija homotetije $h_1(O_1, k_1)$ i homotetije $h_2(O_2, k_2)$ opet homotetija $h(O, k)$, gdje je $k = k_1 k_2$, a O je točka pravca $O_1 O_2$ takva da vrijedi*

$$\frac{O_1 O}{O_2 O} = \frac{k_2 - 1}{k_2(1 - k_1)}. \tag{3.3}$$



Slika 3.2: Teorem 3.2 lijevo, Teorem 3.3 desno

Dokaz. Neka je T bilo koja točka i $T' = h_1(T)$, $T'' = h_2(T')$ te O sjecište pravaca O_1O_2 i TT''. Prema lemi imamo

$$\frac{O_1T'}{O_1T} \cdot \frac{O_2T''}{O_2T'} \cdot \frac{OT}{OT''} = 1,$$

a kako je $\frac{O_1T'}{O_1T} = k_1$ i $\frac{O_2T''}{O_2T'} = k_2$, to slijedi

$$\frac{OT''}{OT} = k_1 k_2. \tag{3.4}$$

Primijenimo sada lemu na trokut $O_1T'O_2$ i kolinearne točke T, O, T''. Imamo tada

$$\frac{O_1O}{O_2O} \cdot \frac{O_2T''}{T'T''} \cdot \frac{T'T}{O_1T} = 1. \tag{3.5}$$

Kako je

$$\frac{O_2T''}{T'T''} = \frac{O_2T''}{O_2T'' - O_2T'} = \frac{1}{1 - \frac{O_2T'}{O_2T''}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k_2}} = \frac{k_2}{k_2 - 1},$$

$$\frac{T'T}{O_1T} = \frac{O_1T - O_1T'}{O_1T} = 1 - \frac{O_1T'}{O_1T} = 1 - k_1,$$

to iz (3.5) dobivamo

$$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{k_2 - 1}{k_2} \cdot \frac{1}{1 - k_1},$$

tj. vrijedi (3.3). Dakle, O je fiksna točka pravca O_1O_2 neovisna o točki T. Zato jednakost (3.4) znači da je $T'' = h(T)$, gdje je homotetija $h(O, k_1k_2)$.

Budući da smo uveli sve potrebne oznake, promotrit ćemo sada i slučaj kada je $k_1k_2 = 1$. Tada imamo

$$\frac{O_1T'}{O_1T} = k_1 = \frac{1}{k_2} = \frac{O_2T'}{O_2T''},$$

pa su pravci TT'' i O_1O_2 paralelni i osim toga je

$$\frac{TT''}{O_1O_2} = \frac{TT'}{O_1T'} = \frac{O_1T' - O_1T}{O_1T'} = 1 - \frac{O_1T}{O_1T'} = 1 - \frac{1}{k_1} = \frac{k_1 - 1}{k_1} = \text{const.},$$

pa je preslikavanje $h_2 \circ h_1 : T \mapsto T''$ translacija za vektor $\frac{k_1-1}{k_1}\overrightarrow{O_1O_2}$. $\square$

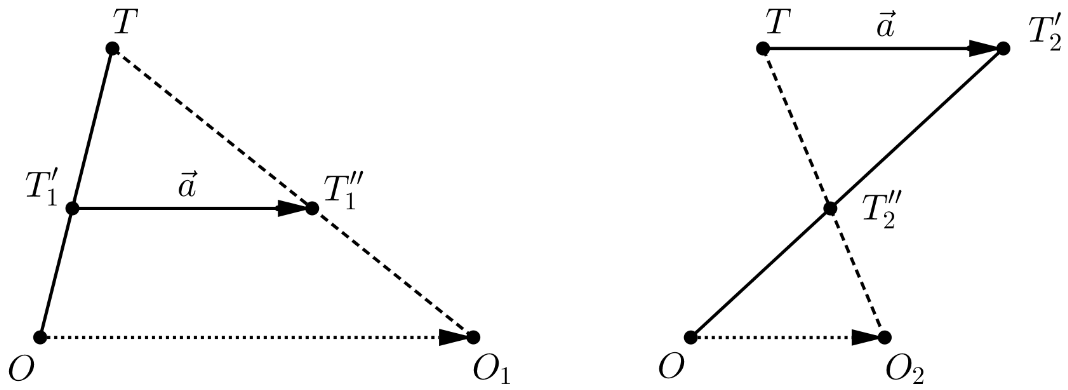
Teorem 3.3. *Kompozicija homotetije $h_1(O_1, k_1)$ i homotetije $h_2(O_2, \frac{1}{k_1})$ je translacija za vektor $\frac{k_1-1}{k_1}\overrightarrow{O_1O_2}$.*

U slučaju $k_1k_2 = 1$ iz (3.5) slijedi $\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{k_2-1}{k_2-k_1k_2} = \frac{k_2-1}{k_2-1} = 1$, pa translaciju za $\frac{k_1-1}{k_1}\overrightarrow{O_1O_2}$ možemo smatrati homotetijom oko beskonačno daleke točke O pravca O_1O_2 i koeficijentom homotetije 1.

Teorem 3.4. *Homotetije s istim centrom O tvore komutativnu grupu.*

Dokaz. Kompozicija homotetija $h_1(O, k_1)$ i $h_2(O, k_2)$ je homotetija $h(O, k_1k_2)$. $\square$

Teorem 3.5. *Sve homotetije i translacije tvore grupu.*



Slika 3.3: Teorem 3.5, kompozicija homotetije i translacije u oba poretka

Dokaz. Inverzno preslikavanje homotetije $h(O, k)$ je opet homotetija $h'(O, \frac{1}{k})$. Kompozicija dvije translacije je translacija po Teoremu 2.21, a kompozicija dvije homotetije je homotetija ili translacija po Teoremima 3.2 i 3.3. Dokazat ćemo još da je kompozicija homotetije i translacije (u oba poretka) opet homotetija.

Neka je $h(O, k)$ homotetija i t translacija za vektor $\vec{a}$. Neka je T bilo koja točka i $h(T) = T_1'$, $t(T_1') = T_1''$. Neka pravac TT_1'' siječe paralelu sa $T_1'T_1''$ kroz O u točki O_1. Tada imamo

$$\frac{OT}{T_1'T} = \frac{OT}{OT - OT_1'} = \frac{1}{1 - \frac{OT_1'}{OT}} = \frac{1}{1 - k},$$

pa je

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{1-k}\,\vec{a} \qquad \text{te} \qquad \frac{O_1T_1''}{O_1T} = \frac{OT_1'}{OT} = k,$$

tj. $t \circ h : T \mapsto T_1''$ je homotetija s centrom O_1 takvim da je $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{1-k}\vec{a}$ i koeficijentom k.

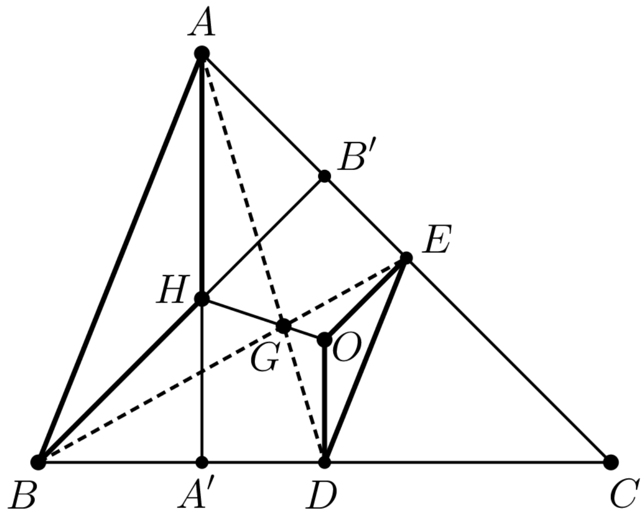
Neka je sada $t(T) = T_2'$, $h(T_2') = T_2''$. Neka pravac TT_2'' siječe paralelu sa TT_2' kroz O u točki O_2. Tada imamo

$$\frac{O_2T_2''}{O_2T} = \frac{OT_2''}{OT_2'} = k,$$
$$\frac{OO_2}{TT_2'} = -\frac{O_2O}{TT_2'} = -\frac{OT_2''}{T_2'T_2''} = -\frac{OT_2''}{OT_2'' - OT_2'} = \frac{1}{\frac{OT_2'}{OT_2''} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{k} - 1} = \frac{k}{1-k},$$

pa je $h \circ t : T \mapsto T_2''$ homotetija s centrom O_2 takvim da je $\overrightarrow{OO_2} = \frac{k}{1-k}\vec{a}$ i koeficijentom k. □

3.2 Primjena homotetije na dokazivanje teorema

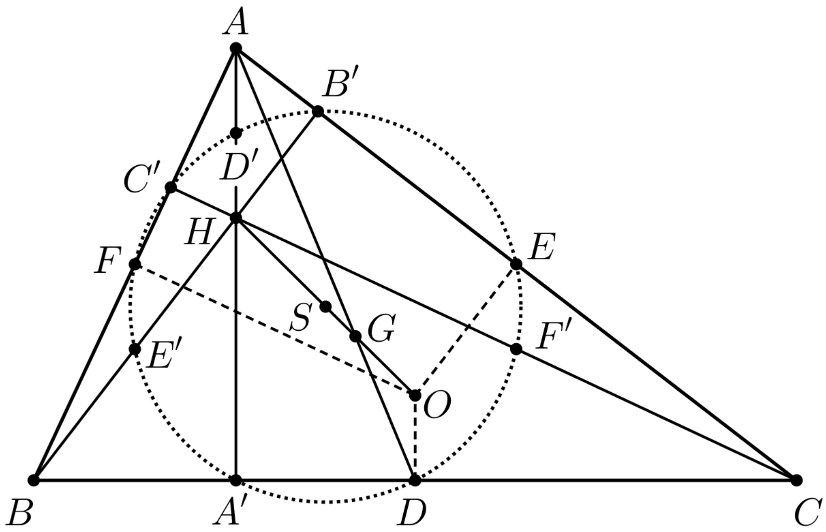
Teorem 3.6. *Središte O opisane kružnice, težište G i ortocentar H trokuta leže na jednom pravcu (*Eulerov pravac trokuta*) i vrijedi $\frac{GH}{GO} = -2$.*



Slika 3.4: Teorem 3.6

Dokaz. Neka su O i H redom središte opisane kružnice i ortocentar trokuta ABC. Neka je G točka takva da vrijedi $\frac{GH}{GO} = -2$. Neka su D i E redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Kako je $DE = \frac{1}{2}BA$ i kako su stranice trokuta ODE paralelne s odgovarajućim stranicama trokuta HAB, to je G središte homotetije s koeficijentom $-\frac{1}{2}$ koja preslikava trokut HAB u trokut ODE. Zato imamo $\frac{GD}{GA} = \frac{GE}{GB} = -\frac{1}{2}$, tj. G je težište trokuta ABC. □

Teorem 3.7. *Neka su D, E, F polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, a $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ visine trokuta ABC koje se sijeku u ortocentru H. Neka su D', E', F' polovišta od $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$. Točke $A', B', C', D, E, F, D', E', F'$ leže na jednoj kružnici (*Feuerbachova *ili* Eulerova kružnica *ili* kružnica 9 točaka *trokuta ABC) kojoj su $\overline{DD'}, \overline{EE'}, \overline{FF'}$ promjeri.*

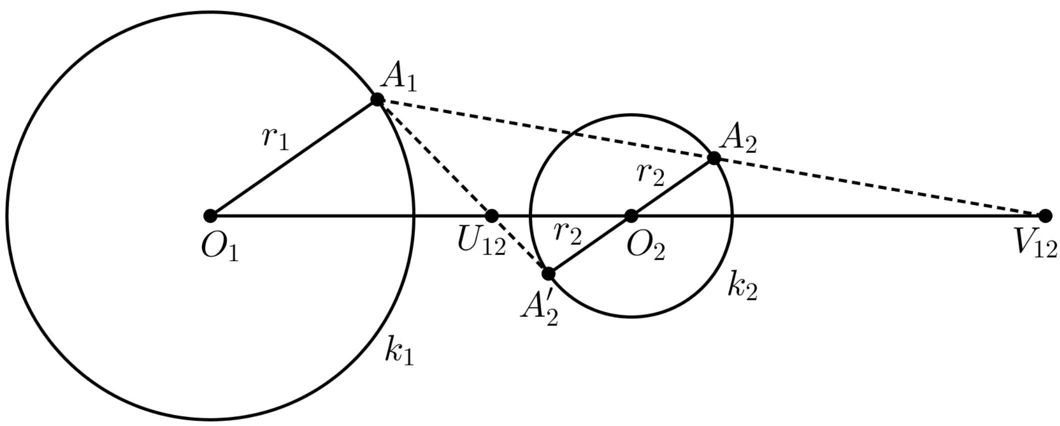


Slika 3.5: Teorem 3.7

Dokaz. Neka je (O, r) opisana kružnica trokuta ABC, a G težište tog trokuta te S polovište dužine $\overline{OH}$. Tada je

$$\frac{GS}{GO} = \frac{GH + HS}{GO} = \frac{-2GO + \frac{1}{2}HO}{GO} = \frac{-2GO + \frac{3}{2}GO}{GO} = -\frac{1}{2},$$

pa homotetija $(G, -\frac{1}{2})$ preslikava kružnicu (O, r) u kružnicu $(S, \frac{r}{2})$, a kako točke A, B, C ta homotetija preslikava u točke D, E, F, to točke D, E, F leže na kružnici $(S, \frac{r}{2})$. Kako je $\frac{HS}{HO} = \frac{1}{2}$ i $\frac{HD'}{HA} = \frac{HE'}{HB} = \frac{HF'}{HC} = \frac{1}{2}$, to homotetija $(H, \frac{1}{2})$ preslikava kružnicu (O, r) u kružnicu $(S, \frac{r}{2})$, a točke A, B, C u točke D', E', F'. Zato točke D', E', F' leže na kružnici $(S, \frac{r}{2})$. Homotetija $(G, -\frac{1}{2})$ preslikava dužinu $\overline{OA}$ u dužinu $\overline{SD}$, pa je $SD \parallel OA$, a homotetija $(H, \frac{1}{2})$ preslikava dužinu $\overline{OA}$ u dužinu $\overline{SD'}$, pa je $SD' \parallel OA$. Zato je $SD \parallel SD'$, tj. točke D, S, D' su kolinearne, pa je $\overline{DD'}$ promjer kružnice $(S, \frac{r}{2})$. Slično se dokazuje za dužine $\overline{EE'}, \overline{FF'}$. Kako je $DA' \perp A'D'$ i $\overline{DD'}$ je promjer od $(S, \frac{r}{2})$, to je po Talesovom poučku i točka A' na toj kružnici, a slično vrijedi i za točke B', C'. $\square$



Slika 3.6: Teorem 3.8

Teorem 3.8. *Dane su dvije kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Neka je $\overline{O_1A_1}$ bilo koji polumjer kružnice k_1 i $\overline{A_2A'_2}$ njemu paralelan promjer kružnice k_2, pri čemu točke A_1 i A_2 leže s iste strane pravca O_1O_2. Tada svi pravci A_1A_2 prolaze jednom čvrstom točkom V_{12},* *a svi pravci* A_1A_2' *jednom čvrstom točkom* U_{12}. *Točke* V_{12} *i* U_{12} *su tzv.* vanjski *i* unutrašnji centar sličnosti *kružnica* k_1 *i* k_2 *te leže na pravcu* O_1O_2.

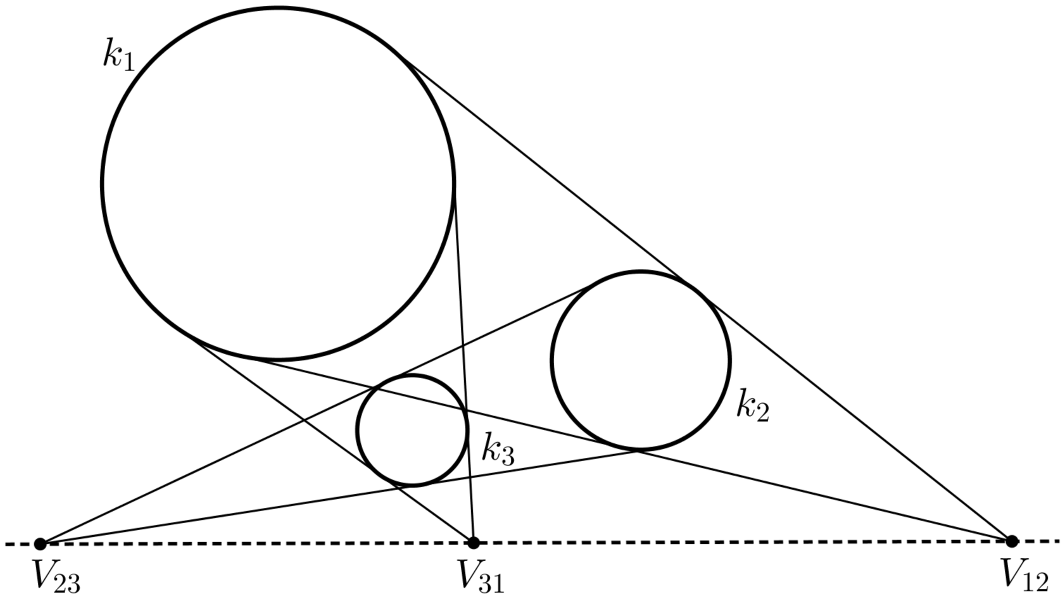
Dokaz. Neka su V_{12}, U_{12} sjecišta pravca O_1O_2 s pravcima A_1A_2, A_1A_2'. Tada imamo

$$\frac{O_1V_{12}}{O_2V_{12}} = \frac{O_1A_1}{O_2A_2} = \frac{r_1}{r_2}, \qquad \frac{O_1U_{12}}{O_2U_{12}} = \frac{O_1A_1}{O_2A_2'} = -\frac{r_1}{r_2},$$

što dokazuje da su V_{12}, U_{12} čvrste točke pravca O_1O_2. Točke V_{12}, U_{12} su ustvari centri homotetija s koeficijentima $\frac{r_2}{r_1}$, $-\frac{r_2}{r_1}$ koje preslikavaju kružnicu k_1 u kružnicu k_2. Točkom V_{12} prolaze vanjske zajedničke tangente, a kroz U_{12} unutrašnje zajedničke tangente kružnica k_1, k_2 ako te tangente postoje. □

Zadatak 3.2. Kada je vanjski centar sličnosti dviju kružnica unutar tih kružnica?

Teorem 3.9. *Dane su kružnice* $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$. *Neka su* V_{23}, U_{23}; V_{31}, U_{31}; V_{12}, U_{12} *vanjski i unutrašnji centri sličnosti parova kružnica* k_2, k_3; k_3, k_1; k_1, k_2. *Tada točke* V_{23}, V_{31}, V_{12}; V_{23}, U_{31}, U_{12}; U_{23}, V_{31}, U_{12}; U_{23}, U_{31}, V_{12} *leže na po jednom pravcu. Ta četiri pravca zovu se osi sličnosti kružnica* k_1, k_2, k_3.



Slika 3.7: Teorem 3.9

Dokaz. Promatramo homotetije

$$\left(V_{12}, \frac{r_2}{r_1}\right), \left(U_{12}, -\frac{r_2}{r_1}\right), \qquad \left(V_{23}, \frac{r_3}{r_2}\right), \left(U_{23}, -\frac{r_3}{r_2}\right), \qquad \left(V_{31}, \frac{r_3}{r_1}\right), \left(U_{31}, -\frac{r_3}{r_1}\right).$$

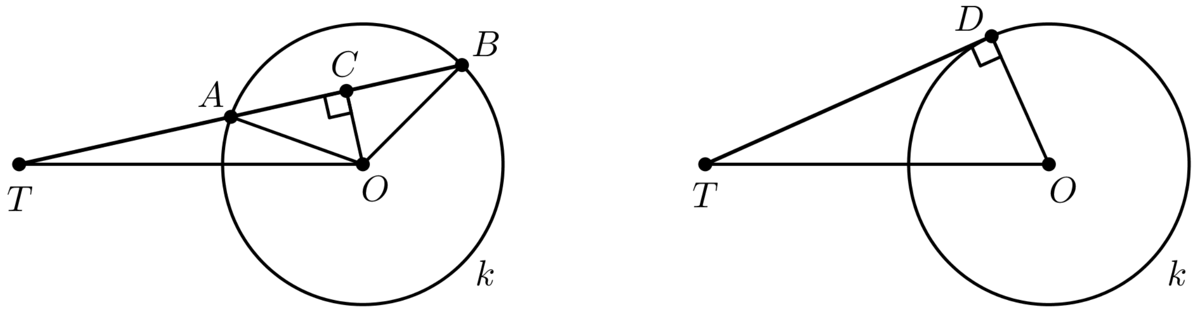
Prve dvije preslikavaju k_1 u k_2, druge dvije k_2 u k_3, a treće dvije k_1 u k_3. Kompozicija homotetija $(V_{12}, \frac{r_2}{r_1})$, $(V_{23}, \frac{r_3}{r_2})$ je zato homotetija koja preslikava k_1 u k_3 i ima koeficijent $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_3}{r_1}$, a to je homotetija $(V_{31}, \frac{r_3}{r_1})$. Zato su prema Teoremu 3.2 točke V_{12}, V_{23}, V_{31} kolinearne. Isto tako kompozicija homotetija $(V_{12}, \frac{r_2}{r_1}), (U_{23}, -\frac{r_3}{r_2})$ je $(U_{31}, -\frac{r_3}{r_1})$, kompozicija $(U_{12}, -\frac{r_2}{r_1}), (V_{23}, \frac{r_3}{r_2})$ je $(U_{31}, -\frac{r_3}{r_1})$, a kompozicija $(U_{12}, -\frac{r_2}{r_1}), (U_{23}, -\frac{r_3}{r_2})$ je $(V_{31}, \frac{r_3}{r_1})$ što dokazuje preostale tri tvrdnje. □

3.3 Potencija točke s obzirom na kružnicu

Teorem 3.10. *Dana je kružnica $k(O, r)$ i točka T. Ako je p bilo koji pravac kroz T koji siječe k u točkama A, B, tada je $TA \cdot TB = OT^2 - r^2 = const.$.*

Dokaz. Neka je C polovište tetive $\overline{AB}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} TA \cdot TB &= (TC + CA) \cdot (TC + CB) = (TC + CA)(TC - CA) = TC^2 - CA^2 \\ &= (TO^2 - OC^2) - (OA^2 - OC^2) = TO^2 - OA^2 = OT^2 - r^2. \end{aligned}$$ □

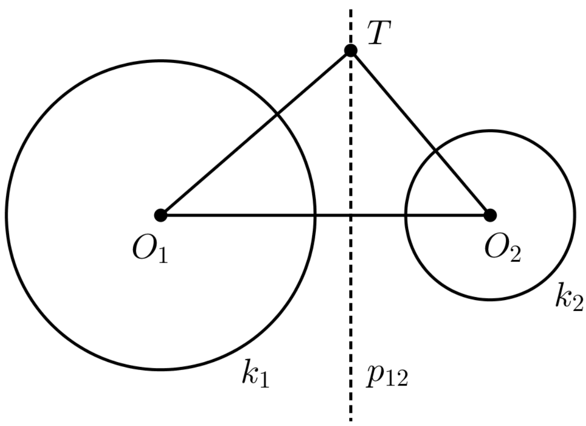


Slika 3.8: Lijevo Teorem 3.10, desno slučaj tangente

Konstantni produkt $p(k, T) = TA \cdot TB = OT^2 - r^2$ zove se *potencija točke* T s obzirom na kružnicu k. Vrijedi

$$\begin{aligned} p(k,T) < 0 &\quad \text{ako je } T \text{ unutar } k, \\ p(k,T) = 0 &\quad \text{ako je } T \text{ na } k, \\ p(k,T) > 0 &\quad \text{ako je } T \text{ izvan } k. \end{aligned}$$

Ako je točka T izvan kružnice $k(O, r)$, onda postoji tangenta iz T na k. Neka je D diralište te tangente. U tom slučaju imamo $TD^2 = OT^2 - OD^2 = OT^2 - r^2$, tj. duljina TD jednaka je $\sqrt{p(k,T)}$ što je u skladu s činjenicom da mora biti $TD \cdot TD = p(k, T)$. Kružnica $(T, \sqrt{p(k,T)})$ prolazi točkom D i ima pravac DO za tangentu, tj. okomita je na kružnicu k. Dakle, kružnica $(T, \sqrt{p(k,T)})$ je ortogonalna na danu kružnicu k.



Slika 3.9: Teorem 3.11

Teorem 3.11. *Dane su kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Skup svih točaka s jednakim potencijama s obzirom na kružnice k_1, k_2 je pravac p_{12} okomit na pravac O_1O_2, koji prolazi kroz zajedničke točke kružnica k_1, k_2 ako ih one imaju.*

Dokaz. Tvrdnja $p(k_1, T) = p(k_2, T)$ je ekvivalentna sa $O_1T^2 - r_1^2 = O_2T^2 - r_2^2$, odnosno $O_1T^2 - O_2T^2 = r_1^2 - r_2^2$. Kako je $r_1^2 - r_2^2 = \text{const.}$, to tvrdnja slijedi iz Primjera 1.13. Posljednja tvrdnja je očigledna jer ako je $T \in k_1 \cap k_2$, onda je $p(k_1, T) = 0 = p(k_2, T)$. $\square$

Pravac p_{12} iz Teorema 3.11 zovemo *potencijalom* ili *radikalnom osi* kružnica k_1 i k_2.

Teorem 3.12. *Dane su kružnice k_1, k_2, k_3 čija središta nisu kolinearna. Neka su redom p_{12}, p_{13}, p_{23} potencijale parova kružnica k_1, k_2; k_1, k_3; k_2, k_3. Tada se pravci p_{12}, p_{13}, p_{23} sijeku u jednoj točki P.*

Dokaz. Pravci p_{12}, p_{13}, p_{23} nisu paralelni zbog nekolinearnosti središta od k_1, k_2, k_3. Neka je $P \in p_{12} \cap p_{13}$. Tada je $P \in p_{12}$ i zato $p(k_1, P) = p(k_2, P)$, a osim toga je $P \in p_{13}$ i zato $p(k_1, P) = p(k_3, P)$. Odavde slijedi $p(k_2, P) = p(k_3, P)$, tj. $p \in p_{23}$. $\square$

Točku P iz Teorema 3.12 zovemo *potencijalnim* ili *radikalnim središtem* kružnica k_1, k_2 i k_3.

Iz definicije potencijale p_{12} dviju kružnica k_1, k_2 slijedi da je p_{12} skup središta kružnica koje su ortogonalne na obje kružnice k_1, k_2. Dakle, sve kružnice koje su ortogonalne na kružnice k_1, k_2 imaju središta na potencijali p_{12} od k_1, k_2. Ovakav skup kružnica ortogonalnih na dvije dane kružnice zovemo *pramenom kružnica*.

3.4 Inverzija

Dana je točka O i realni broj p. *Inverzija* $i[O, p]$ je preslikavanje definirano na skupu $E^2 \setminus \{O\}$ svih točaka ravnine osim O takvo da je $i(A) = A'$ ako je A' točka pravca OA takva da je $OA \cdot OA' = p$. Ovdje koristimo orijentirane udaljenosti. Točku O zovemo *središtem* inverzije, a broj p *potencijom* inverzije.

Za $p > 0$ imamo tzv. *hiperboličku* inverziju, a za $p < 0$, imamo tzv. *eliptičku* inverziju. Slučaj $p = 0$ dao bi preslikavanje, tzv. paraboličku inverziju, koja svaku točku ravnine različitu od O preslikava u točku O. Ovaj slučaj nećemo promatrati jer i tada nije bijekcija. Zato je u nastavku $p \neq 0$.

Eliptička inverzija $i[O, p]$ može se prikazati kao kompozicija hiperboličke inverzije $i[O, -p]$ i centralne simetrije s obzirom na točku O. Zato ćemo proučavati samo hiperboličke inverzije, tj. neka je nadalje $p > 0$.

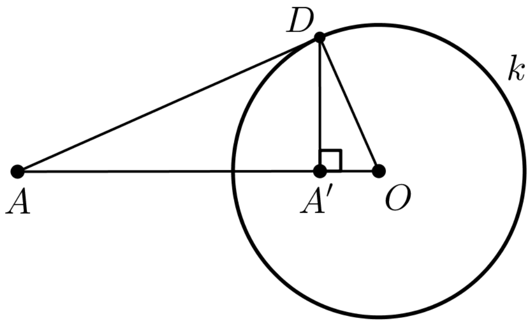
Iz definicije se vidi da je inverzija involutorno preslikavanje, tj. iz $i(A) = A'$ slijedi $i(A') = A$. Par točaka A, A' koje su jedna drugoj slike po inverziji i zvat ćemo *inverznim* točkama s obzirom na i.

Vidimo da ako $OA \to 0$, onda $OA' \to \infty$ i obrnuto ako $OA \to \infty$, onda $OA' \to 0$. Drugim riječima, ako se od točaka A, A' jedna približava po nekom pravcu centru inverzije, onda se druga točka po istom pravcu beskonačno udaljava. Očito je inverzija i bijekcija na skupu točaka $E^2 \setminus \{O\}$. Međutim i nije bijekcija na skupu E^2 jer točki O nije pridružena nijedna točka. Zbog te činjenice, smatrat ćemo da u ravnini postoji jedna tzv. beskonačno daleka točka O' koju mi toj ravnini dodajemo i koju ćemo smatrati slikom od O po i, tj. neka je $i(O) = O'$. Uz taj dogovor je $i(i(A)) = A$ za svaku točku iz E^2.

Označimo sa $r = \sqrt{p}$ broj koji zovemo *polumjerom inverzije* i. Iz definicije je $OA \cdot OA' = r^2$. Kružnicu $k(O, r)$ zvat ćemo *kružnicom inverzije* i. Za točku A na toj kružnici je očito

$i(A) = A$. Štoviše, točka je fiksna ako i samo leži na kružnici inverzije. Inverziju $i[O, r^2]$ zovemo još i inverzija s obzirom na kružnicu $k(O, r)$.

Primjer 3.3. Dana je kružnica $k(O, r)$ i točka A. Konstruirati točku A' inverznu točki A s obzirom na kružnicu k.

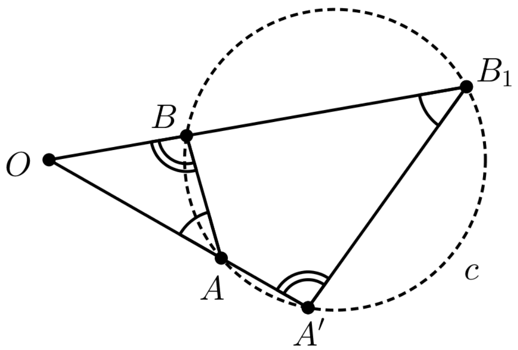


Slika 3.10: Primjer 3.3, konstrukcija inverzne točke

Rješenje. Ako je $A \in k$, onda je $A' = A$. Ako je točka A izvan kružnice k, neka je D dirালište tangente iz A na k i A' nožište okomice iz D na OA. Tada iz pravokutnog trokuta ODA zbog Euklidovog teorema, odnosno sličnosti ODA i $OA'D$, imamo $OA \cdot OA' = OD^2 = r^2$, tj. A' je slika od A pri promatranoj inverziji.

Odavde odmah slijedi i konstrukcija ako je točka A unutar kružnice k. Neka tada okomica u A na pravac OA siječe k u točki D i neka tangenta na k u D siječe OA u točki A'. Onda je A' slika od A pri inverziji $i[O, r^2]$. ♢

Teorem 3.13. *Neka su A, A' i B, B' dva para pridruženih točaka inverzije s centrom O. Tada je $AA'B'B$ tetivni četverokut i $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OB'A'$, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OA'B'$.*



Slika 3.11: Teorem 3.13

Dokaz. Neka je $i[O, r^2]$ dana inverzija. Označimo sa c kružnicu kroz točke A, A', B. Tvrdimo da je i $B' \in c$. Neka pravac OB siječe c ponovno u B_1. Tada je zbog potencije točke $OB \cdot OB_1 = OA \cdot OA'$, a iz definicije inverznih točaka je $OB \cdot OB' = r^2 = OA \cdot OA'$. Stoga je $OB_1 = OB'$, tj. $B_1 = B'$. Druga tvrdnja slijedi iz svojstva tetivnog četverokuta. □

Teorem 3.14. *Ako su A, A' i B, B' dva para pridruženih točaka inverzije $i[O, r^2]$, onda vrijedi*

$$|A'B'| = \frac{r^2}{|OA| \cdot |OB|} \cdot |AB|. \tag{3.6}$$

Dokaz. Kako je prema Teoremu 3.13 $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OB'A'$ i $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OA'B'$, to su trokuti OAB i $OB'A'$ slični, pa imamo

$$\frac{|A'B'|}{|BA|} = \frac{|OA'|}{|OB|} = \frac{|OA'| \cdot |OA|}{|OB| \cdot |OA|} = \frac{r^2}{|OA| \cdot |OB|},$$

odakle odmah slijedi (3.6). □

Formula (3.6) daje nam vezu udaljenosti dviju točaka i udaljenosti njihovih inverznih slika. No, kao što će biti kasnije pokazano, dužina $\overline{A'B'}$ općenito nije slika dužine $\overline{AB}$.

Teorem 3.15. *Ako su $A = (x, y)$ i $A' = (x', y')$ točke inverzne s obzirom na kružnicu $k(O, r)$, gdje je O ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, onda vrijedi*

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}. \tag{3.7}$$

Dokaz. Iz $OA^2 \cdot OA'^2 = r^4$ zbog $OA^2 = x^2 + y^2$ i $OA'^2 = x'^2 + y'^2$ slijedi $(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = r^4$. Osim toga, iz kolinearnosti točaka $O = (0, 0), A, A'$ slijedi $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$, pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo

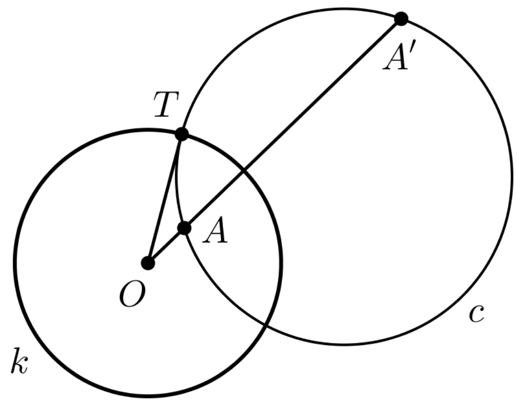
$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)x'^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) &= r^4,\\ x'^2 \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2} &= r^4,\end{aligned}$$

što daje prvu formulu u (3.7), a druga se onda dobiva direktno. □

3.5 Slike pravaca i kružnica pri inverziji

Odredit ćemo sada slike raznih pravaca i kružnica pri inverziji $i[O, r^2]$. Očito je da se kružnica inverzije $k(O, r)$ preslikava sama na sebe jer joj je svaka točka fiksna za inverziju. Isto tako je očito da se svaki pravac p kroz točku O preslikava sam na sebe.

Teorem 3.16. *Ako je kružnica c ortogonalna na kružnicu inverzije k, onda je $i(c) = c$.*



Slika 3.12: Teorem 3.16

Dokaz. Neka se k i c sijeku u točki T i neka bilo koja sekanta od c kroz O siječe c u A i A'. Tada je OT tangenta od c zbog ortogonalnosti k i c, pa imamo $OA \cdot OA' = OT^2 = r^2$, tj. A, A' je par inverznih točaka. Dakle, iz $A \in c$ slijedi $i(A) = A' \in c$, pa je $i(c) = c$. $\square$

Teorem 3.17. *Ako je c bilo koja kružnica kroz par pridruženih točaka A, A' inverzije $i[O, r^2]$, onda je c ortogonalna na kružnicu inverzije $k(O, r)$.*

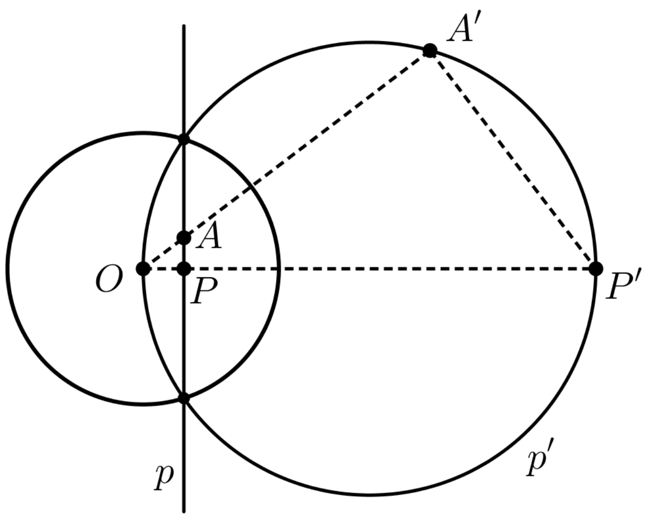
Dokaz. Neka je OT tangenta iz O na c. Tada je $OT^2 = OA \cdot OA'$ zbog potencije točke O s obzirom na kružnicu c, a usto je $OA \cdot OA' = r^2$ jer su A i A' inverzne točke. Zato je $OT = r$ te slijedi da je $T \in k$ i zato $T \in k \cap c$. Stoga je c ortogonalna na k. $\square$

U Teoremu 3.16 je $i(c) = c$, ali za središte S od c nije teško pokazati da je $i(S) \neq S$, tj. središte kružnice ne preslikava se samo u sebe.

Teorem 3.18. *Slika pravca p koji ne prolazi središtem O kružnice k inverzije $i[O, r^2]$ pri toj inverziji je kružnica koja prolazi točkom O i u toj točki ima tangentu paralelnu s pravcem p.*

Dokaz. Neka je P nožište okomice iz O na p i $i(P) = P'$. Neka je p' kružnica s promjerom $\overline{OP'}$. Neka je A bilo koja točka pravca p različita od P te $i(A) = A'$. Tada prema Teoremu 3.13 slijedi $\sphericalangle OA'P' = \sphericalangle OPA = \frac{\pi}{2}$, pa prema Talesovom poučku točka A' leži na kružnici p'.

Obrnuto, ako je A' bilo koja točka kružnice p' različita od O, P' te $i(A') = A$, onda imamo $\sphericalangle OPA = \sphericalangle OA'P' = \frac{\pi}{2}$, pa je A na pravcu p. $\square$



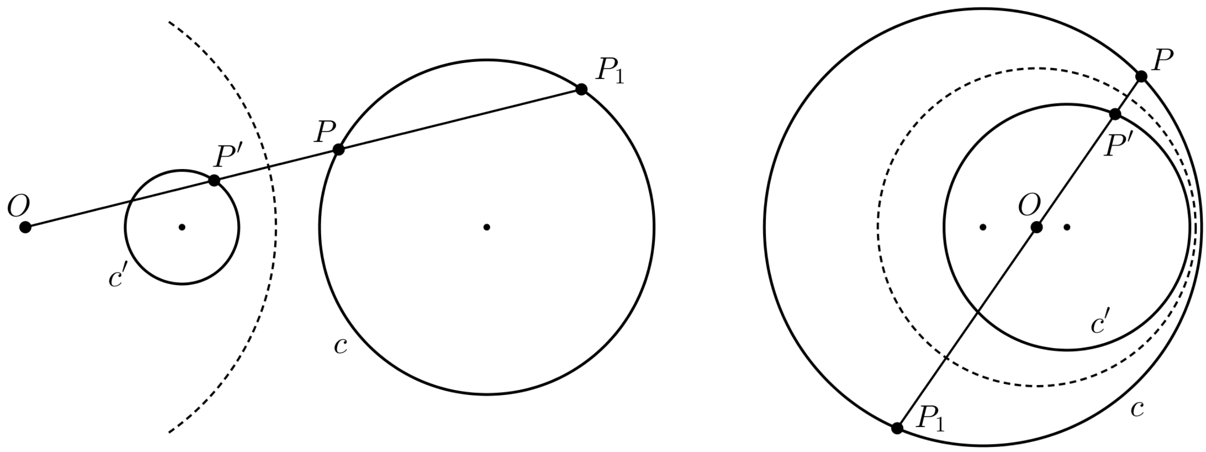
Slika 3.13: Teoremi 3.18 i 3.19

Iz dokaza prethodnog teorema dobili smo i sljedeći rezultat.

Teorem 3.19. *Slika kružnice koja prolazi centrom O inverzije pri toj inverziji je pravac paralelan s tangentom te kružnice u točki O.*

Iz prethodnog se dobro vidi i postupak za preslikavanje pravca i kružnice koja prolazi centrom inverzije. Koristimo oznake kao u dokazu Teorema 3.18, tj. na Slici 3.13. Iz O se spusti okomica OP na p i ako je $i(P) = P'$, onda tražena kružnica p' ima $\overline{OP'}$ za promjer. Obrnuto, ako je dana kružnica p' kroz O i ako je $\overline{OP'}$ njezin promjer te $i(P') = P$, onda je traženi pravac p okomica na OP' u P.

Teorem 3.20. *Slika kružnice c koja ne prolazi kroz centar O inverzije i pri toj inverziji je opet kružnica c' takva da je O centar sličnosti kružnica c, c' i to vanjski ako je O izvan c, a unutrašnji ako je O unutar kružnice c.*



Slika 3.14: Teorem 3.20, oba slučaja

Dokaz. Neka je P bilo koja točka kružnice c, zatim $i(P) = P'$ te P_1 drugo sjecište pravca OP s kružnicom c. Tada je $OP \cdot OP' = r^2$, gdje je r^2 potencija inverzije i, te $OP \cdot OP_1 = p$, gdje je p potencija točke O s obzirom na kružnicu c. Iz ove dvije jednakosti slijedi $\frac{OP'}{OP_1} = \frac{r^2}{p} = \text{const.}$, pa točka P' opisuje skup točaka c' homotetičan skupu c točaka P_1 u odnosu na homotetiju $(O, \frac{r^2}{p})$. Zato je c' kružnica, a točka O je centar sličnosti kružnica c, c'. Taj je centar vanjski ako i samo ako su P' i P_1 s iste strane točke O na pravcu OP. Budući da su P i P' s iste strane od O jer je inverzija hiperbolička, zadnji uvjet je ekvivalentan tome da su P i P_1 s iste strane od O, odnosno da je O izvan kružnice c. □

Sliku kružnice c po inverziji i naći ćemo tako da preslikamo krajnje točke promjera od c koji leži na pravcu kroz O jer se taj promjer opet preslikava u promjer. Središte S kružnice c **ne** preslikava se u središte S_1 kružnice c'. Služeći se dobivenom homotetijom $(O, \frac{r^2}{p})$, dobivamo $\frac{OS_1}{OS} = \frac{r^2}{p}$ i $\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{r^2}{p}$, gdje su ρ, ρ_1 polumjeri kružnica c, c'. Kako je $p = OS^2 - \rho^2$, to odavde slijedi

$$OS_1 = \frac{r^2 \cdot OS}{OS^2 - \rho^2}, \qquad \rho_1 = \frac{r^2 \rho}{OS^2 - \rho^2},$$

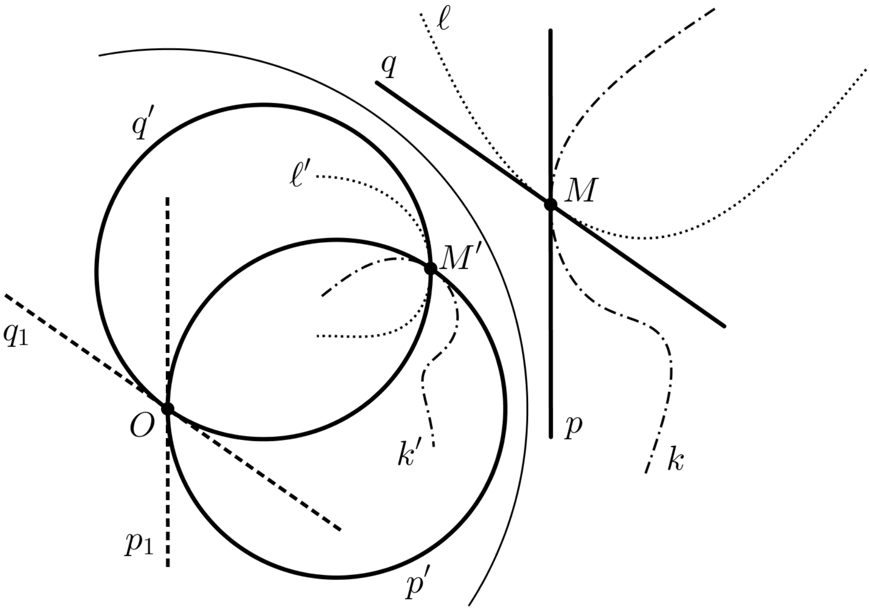
što daje središte S_1 i polumjer ρ_1 kružnice c' izražene pomoću elemenata kružnice c i inverzije i.

Teorem 3.21. *Ako su k', ℓ' slike krivulja k, ℓ po inverziji $i[O, r^2]$ i ako je M sjecište krivulja k i ℓ te $M' = i(M)$ odgovarajuće sjecište krivulja k' i ℓ', onda vrijedi $\sphericalangle_{M'}(k', \ell') = \sphericalangle_M(k, \ell)$, tj. inverzija čuva kutove parova krivulja.*

Dokaz. Neka su p, q tangente krivulja k, ℓ u točki M, a $p' = i(p)$, $q' = i(q)$ te p_1, q_1 tangente kružnica p', q' u točki O. Tada kružnice p', q' diraju u točki M' krivulje k', ℓ'. Prema Teoremu 3.18 su pravci p_1, q_1 paralelni s pravcima p, q. Zato imamo redom

$$\sphericalangle_M(k, \ell) = \sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p_1, q_1) = \sphericalangle_O(p', q') = \sphericalangle_{M'}(p', q') = \sphericalangle_{M'}(k', \ell').$$

Ostaje provjeriti slučajeve kad je O na p ili q što preskačemo. □



Slika 3.15: Teorem 3.21

Zbog Teorema 3.21 kaže se da je inverzija *konformno preslikavanje*.

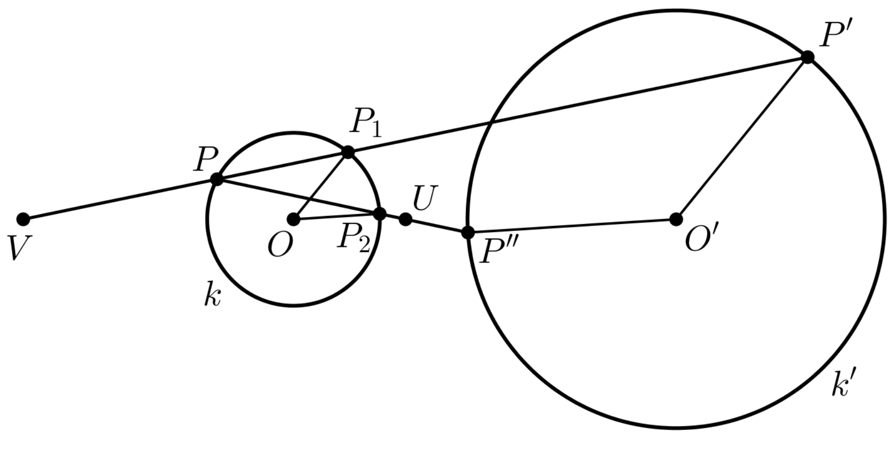
Iz Teorema 3.20 slijedi neposredno: Ako su dane bilo koje dvije kružnice k, k', tada postoje dvije inverzije koje preslikavaju k u k'. Središta tih inverzija su centri sličnosti kružnica k, k'. Promatramo slučaj kada kružnice k, k' nisu jedna unutar druge, a preostali slučaj lako je analogno proučiti. Neka su V, U vanjski i unutrašnji centri sličnosti od k, k', zatim $\lambda = \frac{r'}{r}, \mu = -\frac{r'}{r}$ koeficijenti homotetija $(V, \lambda), (U, \mu)$ koje preslikavaju k u k', te p, q potencije točaka V, U s obzirom na kružnicu k. Tada, uz oznake na Slici 3.16 imamo

$$VP \cdot VP_1 = p, \quad \frac{VP'}{VP_1} = \lambda, \qquad UP \cdot UP_2 = q, \quad \frac{UP''}{UP_2} = \mu,$$

odakle slijedi

$$VP \cdot VP' = p\lambda, \qquad UP \cdot UP'' = q\mu,$$

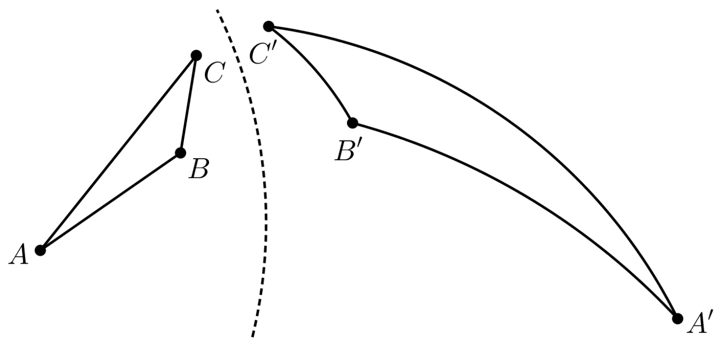
pa su $[V, p\lambda]$, $[U, q\mu]$ tražene inverzije koje preslikavaju k u k', jedna hiperbolička, a druga eliptička.



Slika 3.16: Određivanje inverzija koje jednu kružnicu preslikavaju u drugu

3.6 Primjena inverzije na dokazivanje teorema

Teorem 3.22. *Trokut ABC se inverzijom preslikava u krivocrtni trokut $A'B'C'$ čije stranice su kružni lukovi. Suma "kutova" tog "trokuta" jednaka je π.*

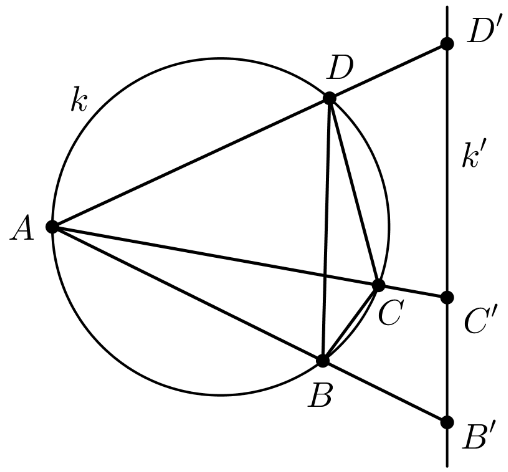


Slika 3.17: Ilustracija Teorema 3.22

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz analogne činjenice za trokut ABC jer inverzija čuva kutove. □

Teorem 3.23 (Ptolomejev teorem). *Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Tada vrijedi*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|.$$



Slika 3.18: Teorem 3.23

Dokaz. Promatrajmo neku inverziju i s centrom A i bilo kojom potencijom r^2. Neka je $i(B) = B'$, $i(C) = C'$, $i(D) = D'$, $i(k) = k'$, gdje je k opisana kružnica četverokuta $ABCD$. Tada je k' pravac i $B', C', D' \in k'$, konkretno $C' \in \overline{B'D'}$. Zato imamo $|B'C'| + |C'D'| = |B'D'|$. Prema Teoremu 3.14 vrijedi

$$|B'C'| = \frac{r^2}{|AB| \cdot |AC|} \cdot |BC|, \quad |C'D'| = \frac{r^2}{|AC| \cdot |AD|} \cdot |CD|, \quad |B'D'| = \frac{r^2}{|AB| \cdot |AD|} \cdot |BD|,$$

pa uvrštavanjem dobivamo

$$\frac{r^2}{|AB| \cdot |AC|} \cdot |BC| + \frac{r^2}{|AC| \cdot |AD|} \cdot |CD| = \frac{r^2}{|AB| \cdot |AD|} \cdot |BD|$$
$$|BC| \cdot |AD| + |CD| \cdot |AB| = |BD| \cdot |AC|,$$

što je i trebalo pokazati. □

Poglavlje 4

Projektivna preslikavanja

Ovo poglavlje je kratki uvod u projektivnu geometriju. Kao što ćemo vidjeti, u projektivnoj geometriji postoji dualitet između točaka i pravaca. Dodavanjem beskonačno dalekih točaka, točke i pravci postaju "ravnopravni".

4.1 Dvoomjer

Najprije definirajmo omjer u kojem točka dijeli orijentiranu dužinu. Za kolinearne točke A, B, C *djelišni omjer* (ABC) definiramo kao omjer usmjerenih duljina AC i BC. Dakle, $(ABC) = \frac{AC}{BC}$.

Neka su A i B dane točke. Promotrimo (ABC) u ovisnosti o položaju točke C.

Ako je C između točaka A i B, orijentirane duljine AC i BC su suprotne orijentacije, pa je $(ABC) < 0$. Posebno, ako je C polovište dužine $\overline{AB}$, onda je $(ABC) = -1$.

Za $C = A$ vrijedi $(ABA) = 0$.

Ako je točka C izvan dužine $\overline{AB}$ (neovisno s koje strane), onda su AC i BC jednako orijentirane, pa je $(ABC) > 0$.

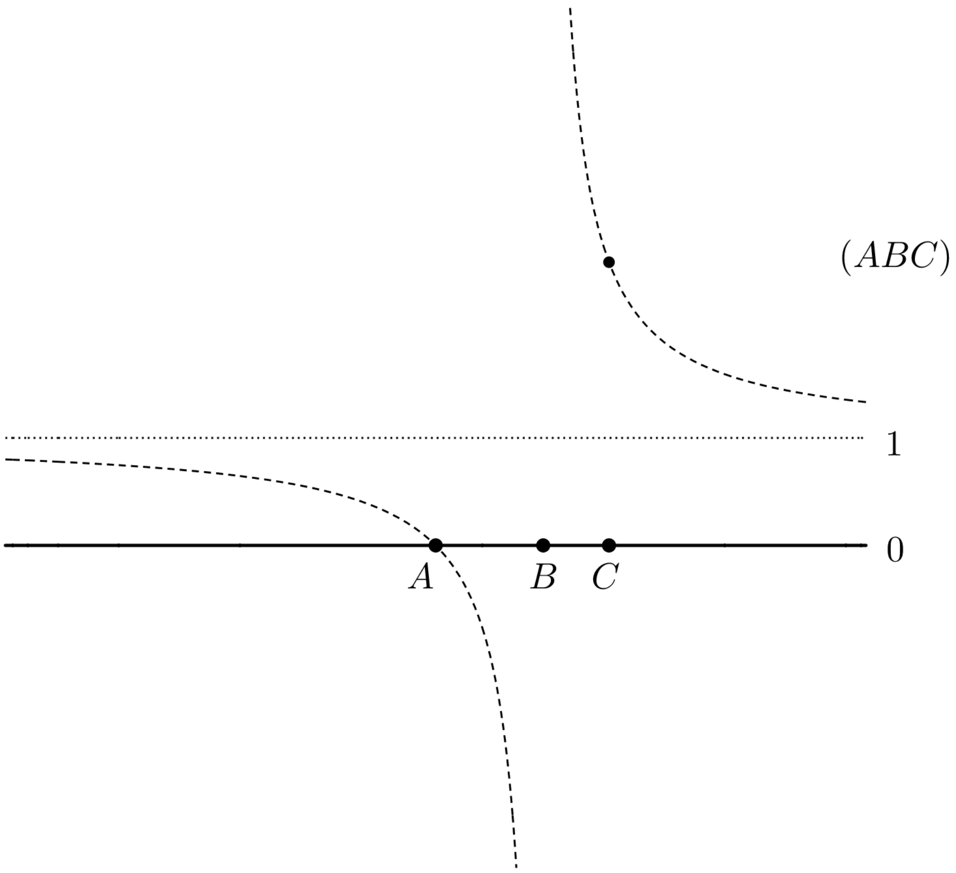
Ako je točka C izvan dužine $\overline{AB}$, na polupravcu BA (tj. ako je C takva da je A između B i C) onda je $(ABC) < 1$, a ako je C takva da je B između A i C onda je $(ABC) > 1$.

Još nismo spomenuli slučaj $C = B$. Tada je $BC = 0$, pa omjer $\frac{AC}{BC}$ nije definiran u skupu $\mathbb{R}$. Ipak, možemo reći da je taj omjer beskonačan, pa pišemo $(ABB) = \infty$.

Kada je $(ABC) = 1$? Trebalo bi biti $AC = BC$, što nije istina ni za koju "realnu" točku pravca, ali vrijedi za beskonačno daleku točku!

Svakom pravcu ćemo dodati po jednu točku koju zovemo *beskonačno daleka točka tog pravca*. Uvođenjem beskonačno dalekih točaka postižemo da se svaka dva pravca sijeku u jednoj točki. Paralelni pravci imaju istu beskonačno daleku točku.

Vidjeli smo da je pridruživanje $C \mapsto (ABC)$ bijekcija između skupa svih točaka pravca (uključujući i njegovu beskonačno daleku točku) i skupa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.



Slika 4.1: Omjer (ABC) u kojem točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$

Za četiri kolinearne točke A, B, C, D *dvoomjer*, u oznaci $(ABCD)$, je omjer djelišnih omjera (ABC) i (ABD). Dakle,

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

Nije teško pokazati da vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 4.1. *Za četiri kolinearne točke A, B, C i D vrijedi*

$$\begin{aligned}
(ABCD) &= (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda, \\
(ABDC) &= (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\lambda}, \\
(ACBD) &= (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - \lambda, \\
(ACDB) &= (CABD) = (DBAC) = (BDCA) = \frac{1}{1-\lambda}, \\
(ADBC) &= (DACB) = (BCAD) = (CBDA) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \\
(ADCB) &= (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.
\end{aligned}$$

Analogno se definiraju djelišni omjer i dvoomjer za tri odnosno četiri pravca koja prolaze istom točkom.

Za tri pravca a, b, c jednog pramena *djelišni omjer* (abc) u kojem pravac c dijeli par pravaca a, b je broj

$$(abc) = \frac{\sin \sphericalangle(a, c)}{\sin \sphericalangle(b, c)},$$

gdje su $\sphericalangle(a, c)$, $\sphericalangle(b, c)$ orijentirani kutovi. Bitan je poredak pravaca, jer je primjerice $\sin \sphericalangle(a, c) = -\sin \sphericalangle(c, a)$.

Uz dane pravce a, b koji se sijeku, postoji bijekcija skupa pravaca točkom $a \cap b$ na skup $\overline{\mathbb{R}}$ dana sa $c \mapsto (abc)$.

Za četiri pravca a, b, c, d jednog pramena *dvoomjer* $(abcd)$ je broj

$$(abcd) = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{\sin \sphericalangle(a, c)}{\sin \sphericalangle(b, c)} : \frac{\sin \sphericalangle(a, d)}{\sin \sphericalangle(b, d)}.$$

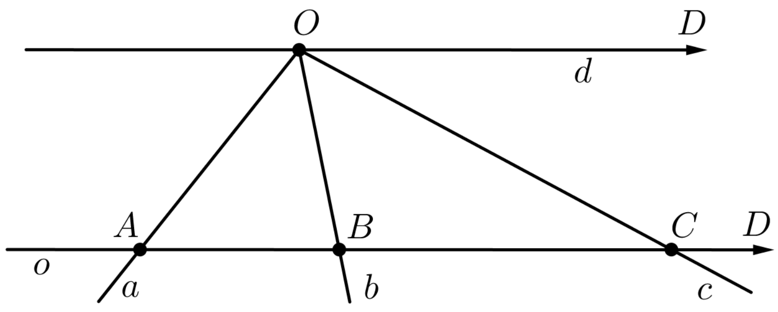
Za dvoomjere pravaca vrijede ista svojstva kao za dvoomjere točaka, posebno vrijedi analogon Propozicije 4.1.

Već smo koristili pojam pramena pravaca. Dualni pojam za točke je niz točaka.

Skup svih točaka jednog pravca nadopunjen jednom beskonačno dalekom točkom zovemo *niz točaka.* Niz točaka na pravcu o označavamo (o), a pravac o je pravac *nosilac* tog niza.

Skup svih pravaca ravnine koji prolaze jednom čvrstom točkom zovemo *pramen pravaca.* Pramen pravaca kroz točku O označavamo (O), a točka O je *vrh* pramena.

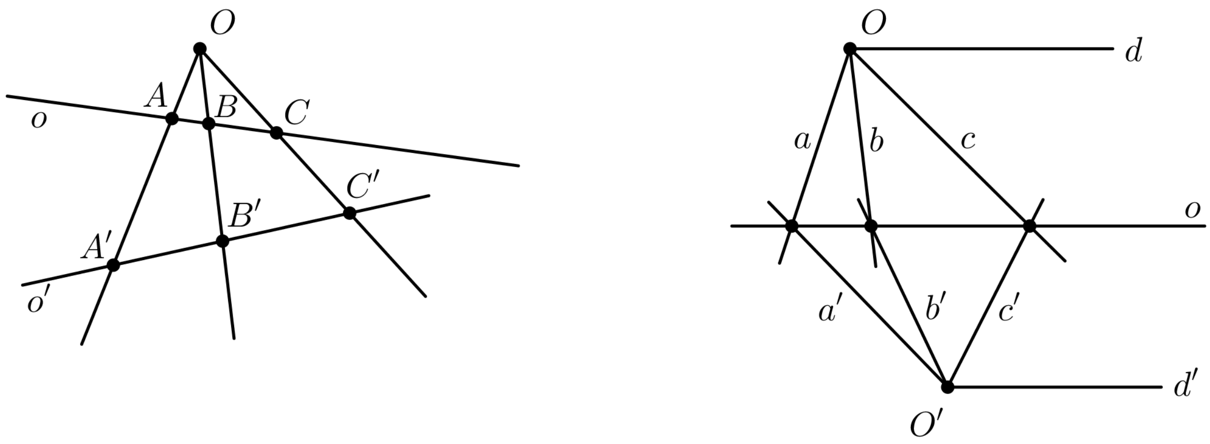
Za niz točaka (o) i pramen pravaca (O) kažemo da su *perspektivni* i pišemo $(o) \doublebarwedge (O)$ ako je uspostavljena bijekcija između između (o) i (O) tako da za pridružene elemente $A \in (o)$ i $a \in (O)$ vrijedi $A \in a$. Na Slici su A, a; B, b; C, c; D, d parovi pridruženih elemenata pri čemu je $d \parallel o$ i D beskonačno daleka točka pravca o.



Slika 4.2: Niz (o) i pramen (O) su perspektivni

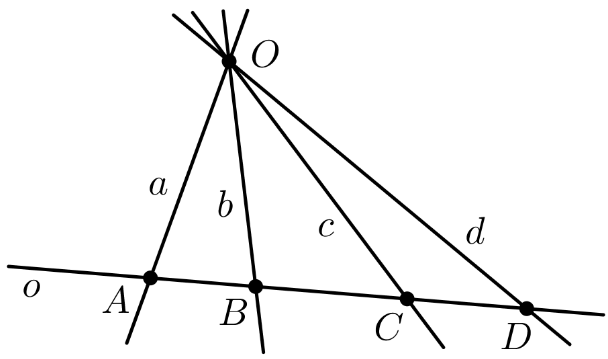
Za dva niza (o) i (o') kažemo da su *perspektivni* s *centrom perspektiviteta* O i pišemo $(o) \overset{O}{\doublebarwedge} (o')$ ako za pridružene točke $A \in (o)$ i $A' \in (o')$ vrijedi $O \in AA'$, tj. ako je $(o) \doublebarwedge (O) \doublebarwedge (o')$.

Za dva pramena (O) i (O') kažemo da su *perspektivni* s *osi perspektiviteta* o i pišemo $(O) \overset{o}{\doublebarwedge} (O')$ ako za pridružene pravce $a \in (O)$ i $a' \in (O')$ vrijedi $a \cap a' \in o$, tj. ako je $(O) \doublebarwedge (o) \doublebarwedge (O')$.



Slika 4.3: Lijevo dva perspektivna niza, desno dva perspektivna pramena

Teorem 4.2 (Papusov teorem)**.** *Ako su A, B, C, D četiri točke niza (o) i a, b, c, d pridruženi pravci njemu perspektivnog pramena (O), onda vrijedi $(ABCD) = (abcd)$.*



Slika 4.4: Teorem 4.2

Dokaz. Primjenom sinusovog poučka na trokute OAC, OBC, OAD, OBD, dobivamo

$$\frac{AC}{OA} = \frac{\sin\sphericalangle(a,c)}{\sin\sphericalangle(o,c)}, \qquad \frac{BC}{OB} = \frac{\sin\sphericalangle(b,c)}{\sin\sphericalangle(o,c)},$$
$$\frac{AD}{OA} = \frac{\sin\sphericalangle(a,d)}{\sin\sphericalangle(o,d)}, \qquad \frac{BD}{OB} = \frac{\sin\sphericalangle(b,d)}{\sin\sphericalangle(o,d)},$$

a odavde slijedi najprije

$$\frac{OB}{OA}(ABC) = (abc), \qquad \frac{OB}{OA}(ABD) = (abd)$$

i zatim tražena jednakost. □

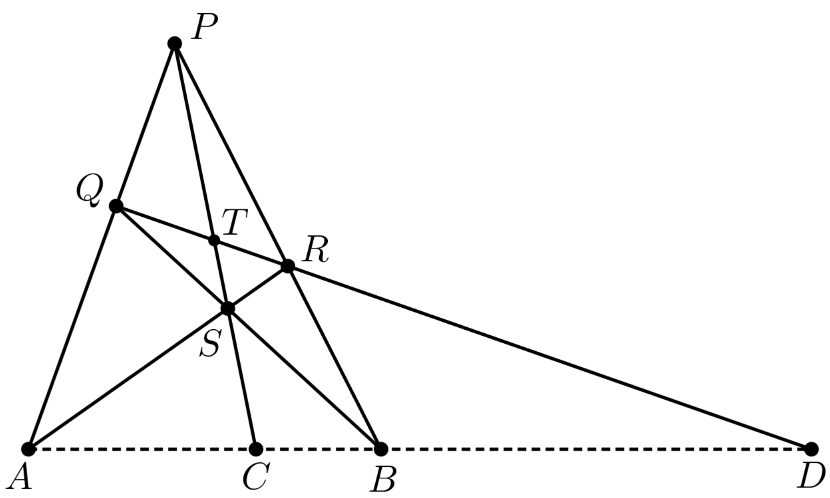
Korolar 4.3. *Ako su A, A'; B, B'; C, C'; D, D' pridružene točke dvaju perspektivnih nizova, onda vrijedi $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

Korolar 4.4. *Ako su a, a'; b, b'; c, c'; d, d' pridruženi pravci dvaju perspektivnih pramena, onda vrijedi $(abcd) = (a'b'c'd')$.*

Lik od četiri točke P, Q, R, S od kojih nikoje tri nisu kolinearne i njihovih šest spojnica zovemo *potpunim četverovrhom* s vrhovima P, Q, R, S i stranicama PQ, PR, PS, QR, QS, RS. Sjecišta parova suprotnih stranica $PQ \cap RS$, $PR \cap QS$, $PS \cap QR$ zovemo dijagonalnim točkama, a njihove tri spojnice dijagonalama potpunog četverovrha.

Teorem 4.5. *Neka su A, B, C, D kolinearne točke takve da postoji potpuni četverovrh $PQRS$ za koji dvije suprotne stranice PQ, RS prolaze kroz A, dvije suprotne stranice PR, QS kroz B, a stranica PS kroz C te QR kroz D. Tada vrijedi*

$$(ABCD) = -1. \tag{4.1}$$



Slika 4.5: Teorem 4.5

Dokaz. Neka je $T \in PS \cap QR$. Primjenom Korolara 4.3 imamo redom

$$(ABCD) \stackrel{P}{=} (QRTD) \stackrel{S}{=} (BACD) = \frac{1}{(ABCD)},$$

pa je $(ABCD)^2 = 1$. Očito je $C \neq D$, pa je $(ABC) \neq (ABD)$ i zato $(ABCD) \neq 1$. Dakle, vrijedi (4.1). ☐

Ako za četiri točke A, B, C, D jednog pravca vrijedi jednakost (4.1), reći ćemo da su parovi točaka A, B i C, D *u harmonitetu.*

Za dva niza točaka (o) i (o') reći ćemo da su *projektivni* i pisati $(o) \barwedge (o')$ ako za bilo koja četiri para pridruženih točaka A, A'; B, B'; C, C'; D, D' jednog i drugog niza, vrijedi $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Perspektivni nizovi su očito projektivni dok obrat ne vrijedi. Pokazuje se da su dva niza točaka projektivni ako i samo ako se mogu dobiti jedan iz drugoga preko kompozicije konačno mnogo perspektiviteta.

Ako u nizovima točaka $(o), (o')$ pridružimo parove točaka A, A'; B, B', C, C', onda za bilo koju točku $D \in (o)$ postoji jedna i samo jedna točka $D' \in (o')$ takva da vrijedi $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Zato vrijedi sljedeći teorem.

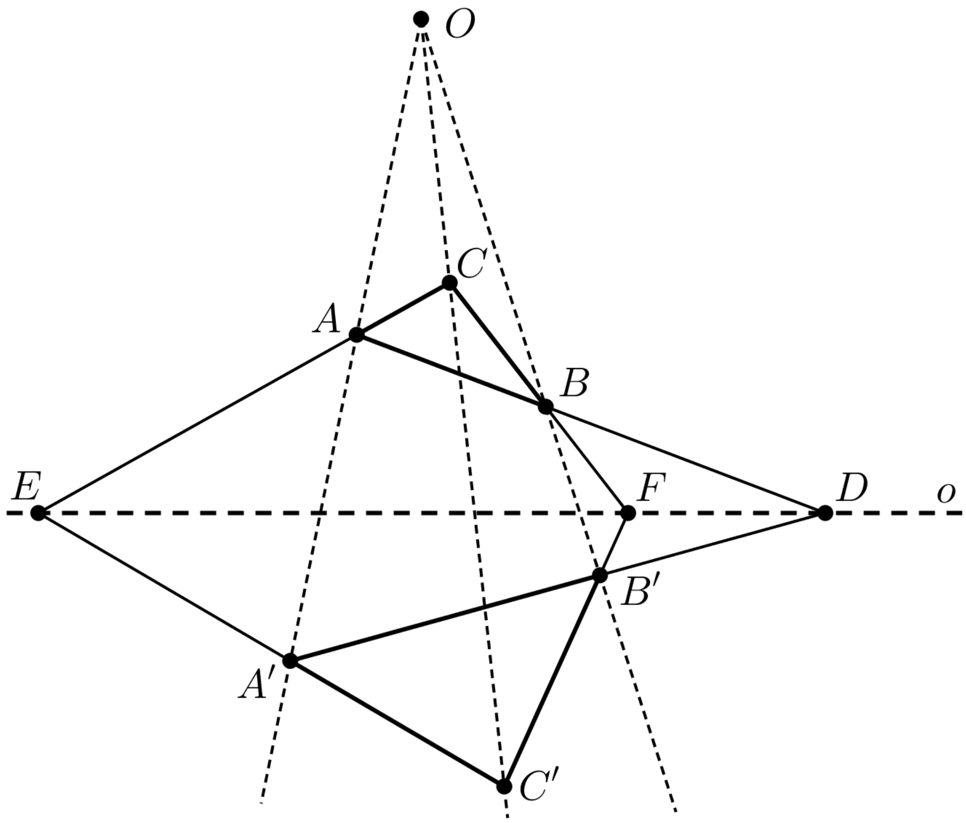
Teorem 4.6 (Fundamentalni teorem projektivne geometrije)**.** *Projektivitet dvaju nizova točaka jednoznačno je određen sa tri para pridruženih točaka.*

Analogno se definira projektivitet dvaju pramenova pravaca.

4.2 Perspektivna kolineacija

I ovdje smatramo da je ravnina nadopunjena beskonačno dalekim točkama koje sve pripadaju jednom *beskonačno dalekom pravcu*. *Kolineacija ravnine* je preslikavanje skupa točaka ravnine na sebe koje čuva kolinearnost, tj. preslikava pravce u pravce.

Teorem 4.7 (Desarguesov teorem). *Dani su trokuti ABC i $A'B'C'$. Ako pravci AA', BB', CC' prolaze jednom točkom O, tada točke $D \in AB \cap A'B'$, $E \in AC \cap A'C'$, $F \in BC \cap B'C'$ leže na jednom pravcu o.*



Slika 4.6: Teorem 4.7

Dokaz. Primjenom Leme 3.1, tj. Menelajevog teorema na trokut OAB i kolinearne točke A', B', D, zatim na trokut OAC i kolinearne točke A', C', E, te na trokut OBC i kolinearne točke B', C', F dobivamo redom jednakosti

$$\frac{OA'}{AA'} \cdot \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BB'}{OB'} = 1, \qquad \frac{OC'}{CC'} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AA'}{OA'} = 1, \qquad \frac{OB'}{BB'} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CC'}{OC'} = 1,$$

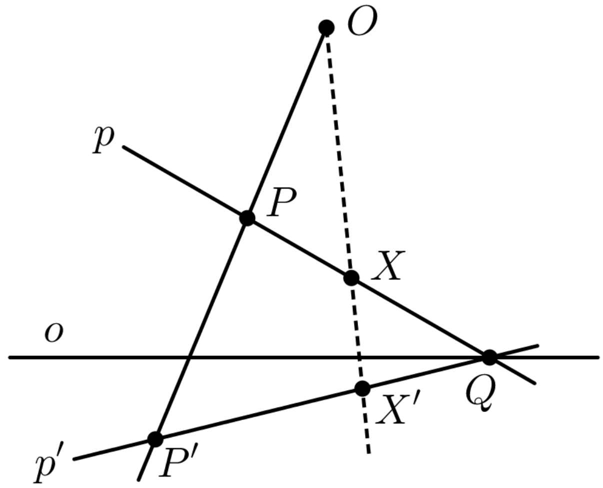
odakle množenjem slijedi

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1,$$

pa prema istoj lemi primijenjenoj na trokut ABC i točke D, E, F slijedi da su točke D, E, F kolinearne. $\square$

Prethodni teorem možemo iskazati ovako: ako su dva trokuta centralno perspektivni, onda su oni i osno perspektivni.

Neka je sada u ravnini dana točka O i pravac o te dvije točke A, A' kolinearne s točkom O. Odaberimo neku točku B izvan pravaca o i OA. Neka je $D \in AB \cap o$, $B' \in OB \cap A'D$. Za bilo koju točku C izvan pravca OA definirat ćemo točku C' na isti način $E \in AC \cap o$, $C' \in OC \cap A'E$. Promatrat ćemo preslikavanje skupa točaka ravnine dano sa $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, gdje su A i B naše dvije odabrane točke, a C bilo koja točka. Tvrdimo da su točke A i B ravnopravne u definiranju ovog preslikavanja. Dakle, treba dokazati da za $F \in BC \cap o$ vrijedi $C' \in OC \cap B'F$. No, to slijedi za točku izvan pravca OB prema Teoremu 4.7, a ako je $C \in OB$, tada je tvrdnja trivijalna. Dakle, preslikavanje ne ovisi o izboru točke A jer se isti rezultat dobiva ako se krene od točke B. Ujedno smo vidjeli da je ovo preslikavanje određeno točkom O, pravcem o i parom pridruženih točaka A, A'. Jedino za točku $C \in OA$ nismo definirali točku C'. Međutim, jasno je da u tom slučaju najprije treba konstruirati sliku B' neke točke B izvan pravca OA, a zatim pomoću para točaka B, B' konstruirati sliku C' točke C tako da je $F \in BC \cap o$, $C' \in B'F \cap OC$.



Slika 4.7: Slika pravca po perspektivnoj kolineaciji

Za točku $X \in o$ očito je $X' = X$, a isto tako je $O' = O$. Zatim vidimo da je $o' = o$ i da za pravce x koji prolaze točkom O vrijedi $x' = x$. Neka je sada p bilo koji pravac. Odaberimo točku $P \in p$ i stavimo $Q \in p \cap o$. Neka je P' točka pridružena točki P. Zbog $Q \in o$ je $Q' = Q$. Ako je sada $X \in p$ bilo koja točka, onda imamo $Q \in p \cap o = PX \cap o$, $X' \in QP' \cap OX$ i točka X' uvijek leži na pravcu $P'Q = p'$. Zato je slika pravca p pravac p' i pravci p i p' se sijeku u točki Q na pravcu o. Dakle, naše preslikavanje je kolineacija.

Prethodno razmatranje pokazuje da postoji kolineacija koja ima ova svojstva:

(a) parovi pridruženih točaka su kolinearni s čvrstom točkom O i

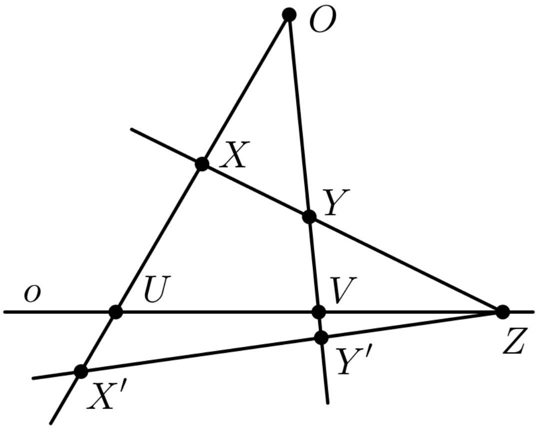
(b) parovi pridruženih pravaca sijeku se na čvrstom pravcu o.

Takva kolineacija zove se *perspektivna kolineacija* s *centrom* O i *osi* o i označava se sa (O, o). Usput smo dokazali da je perspektivna kolineacija određena svojim centrom, svojom osi i jednim parom pridruženih točaka te smo vidjeli kako se u tom slučaju konstruiraju slike pojedinih točaka i pojedinih pravaca.

Centar O može ležati na pravcu o, ali ćemo obično promatrati slučajeve gdje $O \notin o$.

Ako je pravac p paralelan s osi o, onda je $p \cap o$ beskonačno daleka točka kroz koju prolazi i pravac p', tj. i pravac p' je paralelan sa o.

Teorem 4.8. *Ako je X, X' par pridruženih točaka perspektivne kolineacije (O, o), onda vrijedi $(OUXX') = const.$, gdje je $U \in o \cap OX$.*



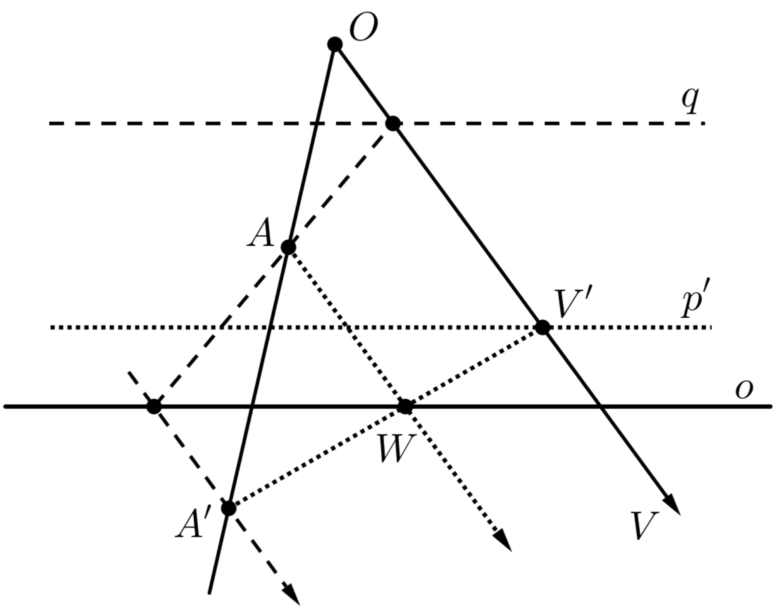
Slika 4.8: Teorem 4.8

Dokaz. Neka je Y bilo koja točka koja ne leži ni na o ni na OX, te neka je $Z \in XY \cap o$ i $V \in OY \cap o$. Tada prema Korolaru 4.4 imamo $(OUXX') = (OVYY')$ jer su O, O; U, V; X, Y; X', Y' pridružene točke dvaju perspektivnih nizova s centrom perspektiviteta Z. □

Konstantu $k = (OUXX')$ iz prethodnog teorema zovemo *konstantom* perspektivne kolineacije (O, o).

Ako je karakteristična konstanta perspektivne kolineacije jednaka -1, tada tu perspektivnu kolineaciju zovemo *harmoničkom.* Ona je involutorna, tj. ako je X' slika od X, onda je X slika od X'. Doista, iz $(OUXX') = -1$ slijedi $(OUX'X) = \frac{1}{-1} = -1$.

Primjer 4.1. Konstruirati sliku i prasliku beskonačno dalekog pravca pri perspektivnoj kolineaciji (O, o).



Slika 4.9: Primjer 4.1

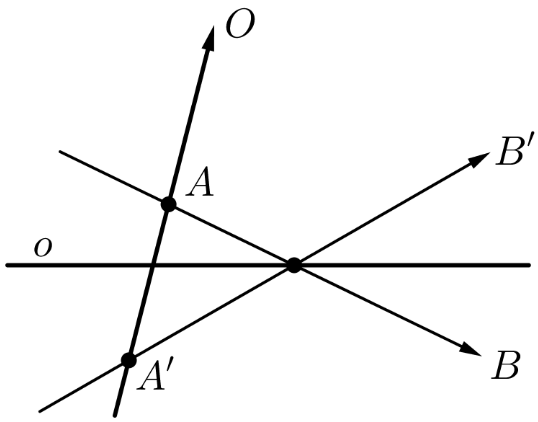
Rješenje. Označimo beskonačno daleki pravac sa p. Tada pravac p' mora biti paralelan sa o jer je $o \cap p$ beskonačno daleka točka. Neka je V bilo koja točka pravca p. Pogledajmo pravac OV. Neka je $W \in AV \cap o$, gdje je $AV \parallel OV$. Tada i točka $V' \in A'W \cap OV$ leži na pravcu p', pa je p' pravac kroz V' paralelan sa o.

Zamijenimo li ulogu točaka A, A', dobit ćemo pravac q koji se preslikava u beskonačno daleki pravac $q' = p$.

Sliku p' beskonačno dalekog pravca p zovemo *ubježnim* ili *nedoglednim* pravcem, a prasliku q beskonačno dalekog pravca q' zovemo *izbježnim* pravcem perspektivne kolineacije (O, o). ♢

4.3 Perspektivna afinost

Kolineaciju koja preslikava beskonačno daleki pravac ravnine sam u sebe zovemo *afinost*.



Slika 4.10: Perspektivna kolineacija s osi o i centrom O u beskonačnosti

Promatrajmo sada perspektivnu kolineaciju s osi o kojoj je centar O u beskonačnosti. Neka je ona određena još i parom pridruženih točaka A, A'. Neka je sada B bilo koja beskonačno daleka točka. Tada točka B' leži na pravcu OB, a to je beskonačno daleki pravac. Dakle, slika beskonačno daleke točke je opet beskonačno daleka točka i promatrana perspektivna kolineacija je afinost. Takvu perspektivnu kolineaciju kojoj je centar u beskonačnosti, zovemo *perspektivna afinost* s *osi* o i *centrom* O. Pravci kroz O na kojima leže parovi pridruženih točaka međusobno su paralelni i zovemo ih *zrakama afinosti*.

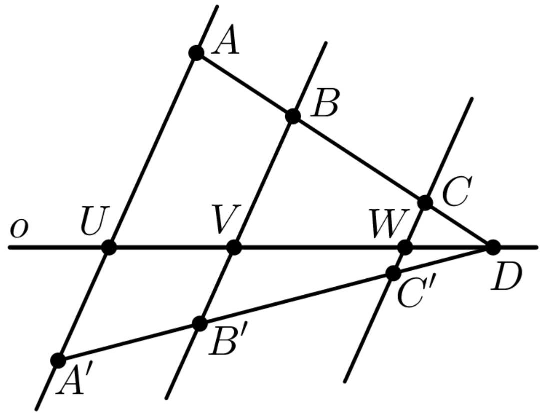
Teorem 4.9. *Perspektivna afinost preslikava paralelne pravce u paralelne pravce i čuva djelišne omjere. Za par pridruženih točaka A, A' i sjecište U pravca AA' s osi afinosti vrijedi $\frac{UA'}{UA} = const.$*

Dokaz. Sjecište paralelnih pravaca je beskonačno daleka točka i preslikava se u sjecište pridruženih pravaca koje je beskonačno daleka točka, pa su i pridruženi pravci paralelni.

Prema Teoremu 4.8 je $(OUAA') = k$ konstanta perspektivne afinosti. Dakle je

$$\frac{OA}{UA} : \frac{OA'}{UA'} = k, \quad \text{tj.} \quad \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{UA'}{UA} = k.$$

Kako je $\frac{OA}{OA'} = 1$ (formalno), to slijedi $\frac{UA'}{UA} = k = \text{const}$. Ova formula vrijedi za svaki par A, A' pridruženih točaka i sjecište U pravca AA' s osi afinosti.



Slika 4.11: Teorem 4.9

Ako su A, B, C kolinearne točke i A', B', C' njihove slike, onda je zbog $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ iz Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}, \quad \text{tj.} \quad (ABC) = (A'B'C'). \qquad \square$$

Zadatak 4.2. Proučite slučajeve perspektivne kolineacije kojoj je os beskonačno daleki pravac, a centar točka u konačnosti te perspektivne kolineacije kojoj su i os i centar u beskonačnosti.

Poglavlje 5

Krivulje 2. stupnja

5.1 Elipsa

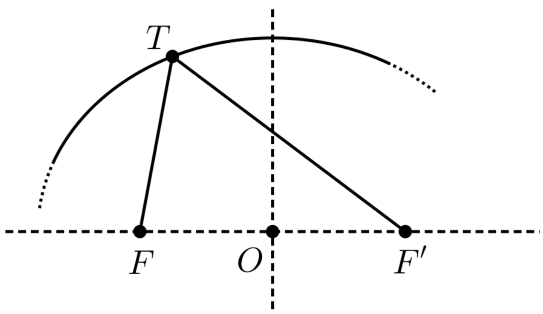
Dane su točke F i F' i duljina $2a$ takva da je $|FF'| < 2a$. Skup svih točaka T takvih da je

$$|FT| + |F'T| = 2a$$

zovemo *elipsa* sa *žarištima* (*fokusima*) F i F' te *velikom poluosi* a. Dužine $\overline{FT}$ i $\overline{F'T}$ zovu se *radijvektori* točke T.

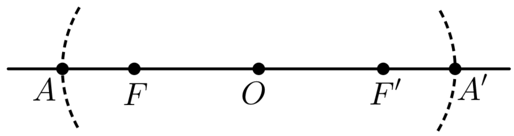
Točku T za koju suma udaljenosti $|FT| + |F'T|$ veća od $2a$ zovemo *vanjska* točka elipse, a onu za koju je ta suma manja od $2a$ zovemo *unutrašnja* točka elipse.

Iz definicije slijedi da je elipsa centralno simetrična s obzirom na polovište O dužine $\overline{FF'}$, pa se točka O zove *središte* elipse. Osim toga je elipsa očito simetrična s obzirom na pravac FF' i simetralu dužine $\overline{FF'}$. Ova dva pravca zovu se redom *glavna* i *sporedna os* elipse. Udaljenost $e = |OF| = |OF'|$ zovemo *linearni ekscentricitet*, a omjer $\varepsilon = \frac{e}{a}$ *numerički ekscentricitet* elipse. Očito je $\varepsilon < 1$.



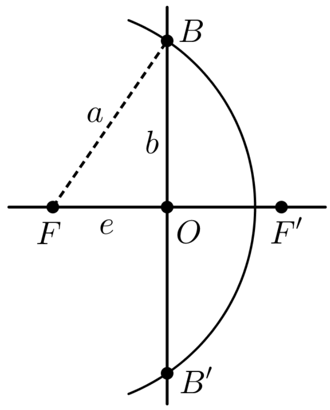
Slika 5.1: Dio elipse s naznačenim žarištima F i F', glavnom i sporednom osi te središtem O

Kako je $|FF'| < 2a$, to na glavnoj osi izvan dužine $\overline{FF'}$ postoje dvije točke A i A' simetrične s obzirom na središte O tako da je $|FA|+|F'A| = |FA'|+|F'A'| = 2a$, tj. točke A i A' leže na elipsi. Točke A i A' zovu se *glavna tjemena* elipse. Iz $|FA| + |F'A| = 2a$ slijedi $|OA| - |OF| + |OA| + |OF'| = 2a$, tj. $2|OA| = 2a$, pa je $|OA| = a$. Slično je $|OA'| = a$, pa je jasan naziv velika poluos za a.



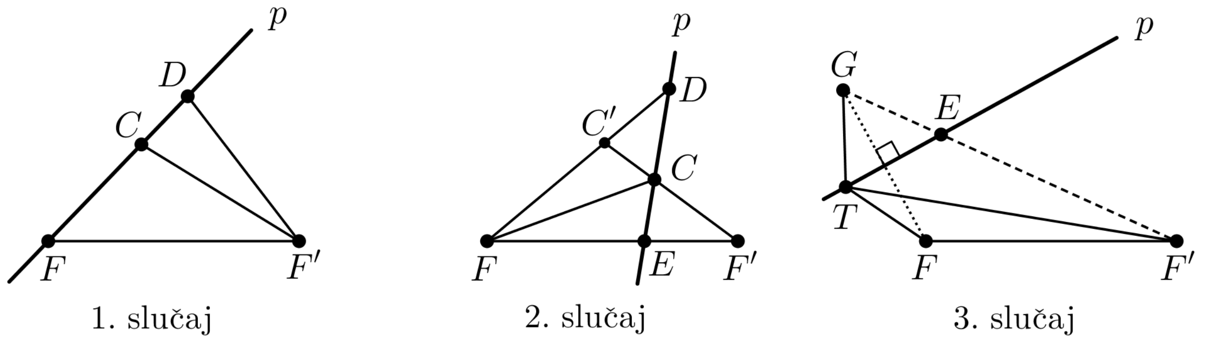
Slika 5.2: Središte O, fokusi F i F' te glavna tjemena A i A'

Kako je $|OF| < a$, to kružnica sa središtem F i polumjerom a siječe sporednu os u dvije točke B i B' simetrične s obzirom na središte O i te su točke na elipsi jer je $|FB|+|F'B| = a + a = 2a$. Točke B i B' zovu se *sporedna tjemena* elipse, a duljina $|OB| = |OB'| = b = \sqrt{a^2 - e^2}$ je *mala poluos* elipse jer je očito $b < a$.



Slika 5.3: Središte O, fokusi F i F' te sporedna tjemena B i B'

Teorem 5.1. *Elipsa i pravac mogu imati najviše dvije zajedničke točke.*



Slika 5.4: Teorem 5.1, tri slučaja u dokazu

Dokaz. 1. slučaj. Dani pravac p prolazi jednim fokusom F elipse. Neka su C i D bilo koje dvije točke pravca p s iste strane od F i neka je $C \in \overline{FD}$. Iz trokuta $F'CD$ slijedi tada da je $|FD| + |DF'| = |FC| + |CD| + |DF'| > |FC| + |CF'|$. Dakle, ako se točka T udaljava od točke F po jednom polupravcu pravca p s početkom F, tada veličina $|FT| + |F'T|$ neprekidno i neograničeno raste od $|FF'|$ do $+\infty$. Zato na tom polupravcu postoji točno jedna točka P takva da je $|FP| + |F'P| = 2a$, a isto tako postoji i točka P' na drugom polupravcu pravca p s istim svojstvom.

2. slučaj. Pravac p siječe dužinu $\overline{FF'}$ u nekoj točki E. Neka su C i D bilo koje dvije točke pravca p s iste strane od E i neka je $C \in \overline{ED}$. Neka je $C' \in CF' \cap FD$. Iz trokuta $C'DF'$ dobivamo $|C'D| + |DF'| > |C'F'|$, pa je

$$|FD| + |DF'| = |FC'| + |C'D| + |DF'| > |FC'| + |C'F'|.$$

Iz trokuta $FC'C$ slijedi $|FC'| + |CC'| > |FC|$, pa je

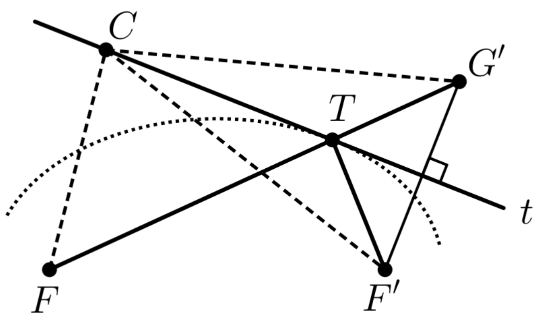
$$|FC'| + |C'F'| = |FC'| + |C'C| + |CF| > |FC| + |CF'|.$$

Iz ovih nejednakosti dobivamo $|FD| + |DF'| > |FC| + |CF'|$. Dakle, kako se točka T udaljava od točke E po jednom polupravcu pravca p, tako veličina $|FT|+|TF'|$ neprekidno i neograničeno raste od $|FF'|$ do $+\infty$ i imamo isti zaključak kao u 1. slučaju.

3. slučaj. Pravac p ne siječe dužinu $\overline{FF'}$. Neka je G točka simetrična F s obzirom na p i neka je $E \in p \cap GF'$. Za bilo koju točku T pravca p je tada $|FT| = |GT|$, pa je zato $|FT| + |F'T| = |GT| + |TF'|$. Ako je $|GF'| < 2a$, onda opet kao u 2. slučaju na svakom polupravcu pravca p s početkom E postoji po jedna točka elipse. Ako je $|GF'| = 2a$, onda je $|FE| + |F'E| = |GE| + |F'E| = |GF'| = 2a$, pa je E jedina točka pravca p koja je na elipsi. Ako je $|GF'| > 2a$, onda za svaku točku $T \in p$ imamo $|FT| + |F'T| = |GT| + |F'T| \geqslant |GF'| > 2a$, tj. p i elipsa nemaju zajedničkih točaka. □

Ako pravac t ima s elipsom jednu jedinu zajedničku točku T, onda se kaže da je t *tangenta* elipse s *diralištem* T. Sve točke elipse su s iste strane tangente.

Teorem 5.2. *Neka je t tangenta elipse s fokusima F i F'. Ako je G' točka simetrična F' s obzirom na t, onda se pravci t i FG' sijeku u diralištu tangente t.*



Slika 5.5: Teorem 5.2

Dokaz. Neka je G' točka simetrična točki F' s obzirom na tangentu t elipse i neka je $T \in FG' \cap t$. Ako je C bilo koja točka pravca p, različita od T, onda iz trokuta FCG' vidimo

$$|FC| + |F'C| = |FC| + |G'C| > |FG'| = |FT| + |G'T| = |FT| + |F'T|.$$

Dakle, od svih točaka pravca p točka T ima najmanju sumu radijvektora. Kada bi ta suma bila veća od $2a$, onda pravac p ne bi s elipsom imao nijednu zajedničku točku i t ne bi bila tangenta elipse. Kada bi ta suma bila manja od $2a$, onda bi svaki polupravac pravca p s početkom T imao s elipsom po jednu zajedničku točku i t opet ne bi bila tangenta elipse. Zato je $|FT| + |F'T| = 2a$, pa je T dirālište tangente t. □

Teorem 5.3. *Tangenta elipse tvori jednake kutove s radijvektorima svojeg dirališta, tj. tangenta elipse je simetrala vanjskog kuta radijvektora dirališta te tangente.*

Dokaz. Iz dokaza Teorema 5.2, tj. sa Slike 5.5 vidimo da je $\sphericalangle(TF, t) = \sphericalangle(TG', t) = \sphericalangle(TF', t)$, pa vrijedi tvrdnja. Primijetimo da je t simetrala vanjskog, a ne unutrašnjeg kuta radijvektora jer t ne sliječe $\overline{FF'}$ (usporedi 2. slučaj u dokazu Teorema 5.1). □

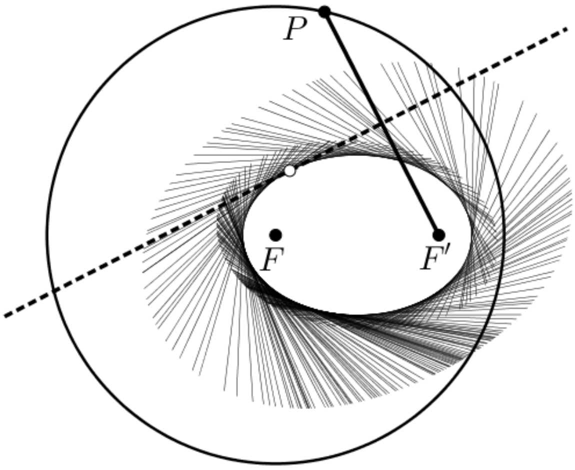
Iz prethodnog teorema slijedi da je normala elipse u točki T simetrala kuta koji zatvaraju radijvektori točke T.

Točka G' simetrična fokusu F' s obzirom na tangentu t elipse zove se *suprotište* fokusa F' s obzirom na tu tangentu. Sa Slike 5.5 vidimo da je $|FG'| = |FT| + |G'T| = |FT| + |F'T| = 2a$, pa vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 5.4. *Skup suprotišta jednog fokusa elipse s obzirom na sve tangente te elipse je kružnica sa središtem u drugom fokusu i polumjerom jednakim velikoj osi te elipse.*

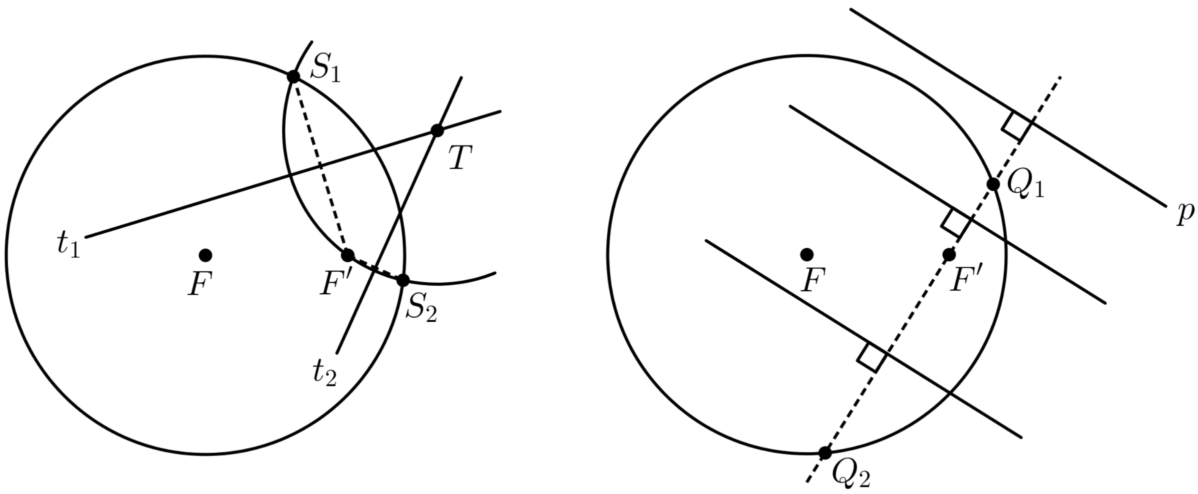
Kružnica $(F, 2a)$ iz Teorema 5.4 zove se *kružnica suprotišta* fokusa F'. Lako se vidi da vrijedi i obrat Teorema 5.4.

Teorem 5.5. *Dana je kružnica $(F, 2a)$ i točka F' unutar nje. Ako je P varijabilna točka te kružnice, onda simetrala dužine $\overline{F'P}$ omata jednu elipsu s fokusima F i F' i velikom osi $2a$.*



Slika 5.6: Ilustracija Teorema 5.5

Primjer 5.1. Dana je elipsa s fokusima F i F' i velikom osi $2a$ te točka T i pravac p. Konstruirati tangentu elipse točkom T. Konstruirati tangentu elipse paralelnu s pravcem p.



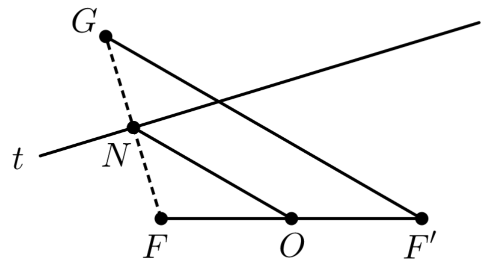
Slika 5.7: Primjer 5.1, lijevo konstrukcija tangente kroz zadanu točku, desno konstrukcija tangente paralelne sa zadanim pravcem

Rješenje. Neka je S sjecište kružnica $(F, 2a)$ i $(T, |TF'|)$. Prema Teoremu 5.5 simetrala t dužine $\overline{F'S}$ je tangenta elipse i ona očito prolazi točkom T.

Okomica iz F' na pravac p siječe kružnicu $(F, 2a)$ u dvije točke Q_1 i Q_2. Prema Teoremu 5.5 su simetrale dužina $\overline{F'Q_1}$ i $\overline{F'Q_2}$ tangente elipse koje su očito paralelne s pravcem p.

Preskačemo raspravu o broju rješenja u pojedinom slučaju. $\diamondsuit$

Teorem 5.6. *Skup nožišta okomica iz fokusa elipse na njezine tangente je kružnica sa središtem u središtu elipse i polumjerom jednakim velikoj poluosi elipse.*



Slika 5.8: Teorem 5.6

Dokaz. neka je G suprotište fokusa F s obzirom na tangentu t, a N nožište okomice iz F na t, te O središte elipse. Tada je $\overline{ON}$ srednjica trokuta $FF'G$, pa je $|ON| = \frac{1}{2}|F'G| = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$. $\square$

Vrijedi i obrat Teorema 5.6.

Teorem 5.7. *Ako je F bilo koja točka unutar kružnice (O, a) i ako točka N opisuje tu kružnicu, onda okomica na pravac FN u točki N omata elipsu kojoj je O središte, F jedan fokus i a velika poluos.*

Kružnica (O, a) iz Teorema 5.6 zove se *glavna kružnica* elipse.

5.2 Hiperbola

Dane su točke F i F' i duljina $2a$ takva da je $|FF'| > 2a$. Skup svih točaka T takvih da je

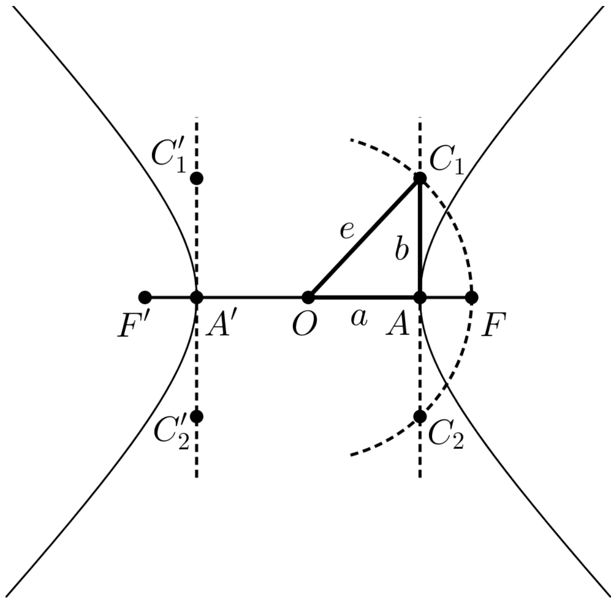
$$\big||FT| - |F'T|\big| = 2a$$

zovemo *hiperbola* sa *žarištima* (*fokusima*) F i F' te *velikom poluosi* a. Dužine $\overline{FT}$ i $\overline{F'T}$ zovu se *radijvektori* točke T.

Točku T za koju je apsolutna vrijednost razlike duljina radijvektora, tj. $\big||FT| - |F'T|\big|$ veća od $2a$ zovemo *unutrašnja* točka hiperbole, a onu za koju je ta razlika manja od $2a$ zovemo *vanjska* točka hiperbole.

Lako se vidi da je hiperbola simetrična s obzirom na pravac FF' i simetralu dužine $\overline{FF'}$. Ova dva pravca zovu se redom *glavna* i *sporedna os* hiperbole. Osim toga hiperbola je simetrična s obzirom na polovište O dužine $\overline{FF'}$, pa se točka O zove *središte* hiperbole.

Udaljenost $e = |OF| = |OF'|$ zovemo *linearni ekscentricitet*, a broj $\varepsilon = \frac{e}{a}$ *numerički ekscentricitet* hiperbole. Očito je $\varepsilon > 1$.



Slika 5.9: Središte O, fokusi F i F', tjemena A i A' te poluosi a i b

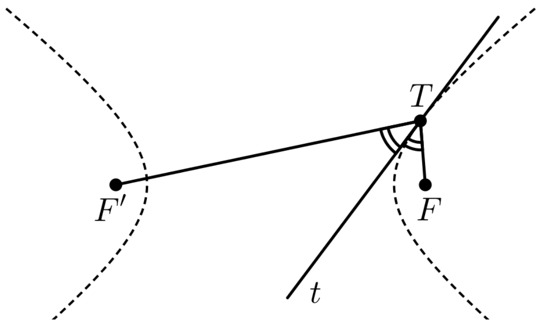
Kako je $|FF'| > 2a$, to na dužini $\overline{FF'}$ postoje dvije točke A i A' simetrične s obzirom na središte O tako da je $\big||FA| - |F'A|\big| = \big||FA'| - |F'A'|\big| = 2a$, tj. točke A i A' leže na hiperboli. Točke A i A' zovu se *glavna tjemena* hiperbole. Iz $|F'A| - |FA| = 2a$ slijedi $|OA| + |OF'| - (|OF| - |OA|) = 2a$, tj. $2|OA| = 2a$, pa je $|OA| = a$. Slično je $|OA'| = a$, pa je jasan naziv velika poluos za a.

Kako je $e > a$, to postoji pozitivan realan broj $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ koji se zove *mala poluos* hiperbole. Ponekad se velika i mala poluos hiperbole zovu redom realna i imaginarna poluos. Kako je $|OA| < e$, to okomica na glavnu os u tjemenu A siječe kružnicu (O, e) u dvije točke C_1 i C_2. Iz pravokutnog trokuta OAC_1 slijedi $|AC_1| = \sqrt{|OC_1|^2 - |OA|^2} = \sqrt{e^2 - a^2} = b$.

Za točku T na sporednoj osi je $\big||FT| - |F'T|\big| = 0$, pa na sporednoj osi nema točaka hiperbole i hiperbola se raspada na dvije grane zadane sa $|FT| - |F'T| = 2a$ i $|FT| - |F'T| = -2a$. Te se grane nalaze s različitih strana sporedne osi.

Analogno kao kod elipse dokazuje se nekoliko teorema i definiraju neki pojmovi.

Teorem 5.8. *Hiperbola i pravac mogu imati najviše dvije zajedničke točke.*



Slika 5.10: Teorem 5.10

Pravac t koji s hiperbolom ima jednu jedinu zajedničku točku T i ne sadrži unutrašnje točke hiperbole zove se *tangenta* hiperbole s *diralištem* T.

Teorem 5.9. *Neka je t tangenta hiperbole s fokusima F i F'. Ako je G' točka simetrična F' s obzirom na t, onda se pravci t i FG' sijeku u diralištu tangente t.*

Teorem 5.10. *Tangenta hiperbole je simetrala kuta radijvektora dirališta te tangente.*

Iz prethodnog teorema slijedi da je normala hiperbole u točki T simetrala vanjskog kuta koji zatvaraju radijvektori točke T.

Točka simetrična fokusu hiperbole s obzirom na njezinu tangentu zove se *suprotište* tog fokusa s obzirom na tu tangentu.

Teorem 5.11. *Skup suprotišta jednog fokusa hiperbole s obzirom na sve tangente te hiperbole je kružnica sa središtem u drugom fokusu i polumjerom jednakim velikoj osi te hiperbole.*

Kružnica $(F, 2a)$ iz Teorema 5.11 zove se *kružnica suprotišta* fokusa F'.

Teorem 5.12. *Dana je kružnica $(F, 2a)$ i točka F' izvan nje. Ako je P varijabilna točka te kružnice, onda simetrala dužine $\overline{F'P}$ omata jednu hiperbolu s fokusima F i F' i velikom osi $2a$.*

Analogno kao u Primjeru 5.1 konstruiraju se i za hiperbolu tangenta koja prolazi zadanom točkom ili tangenta paralelna sa zadanim pravcem.

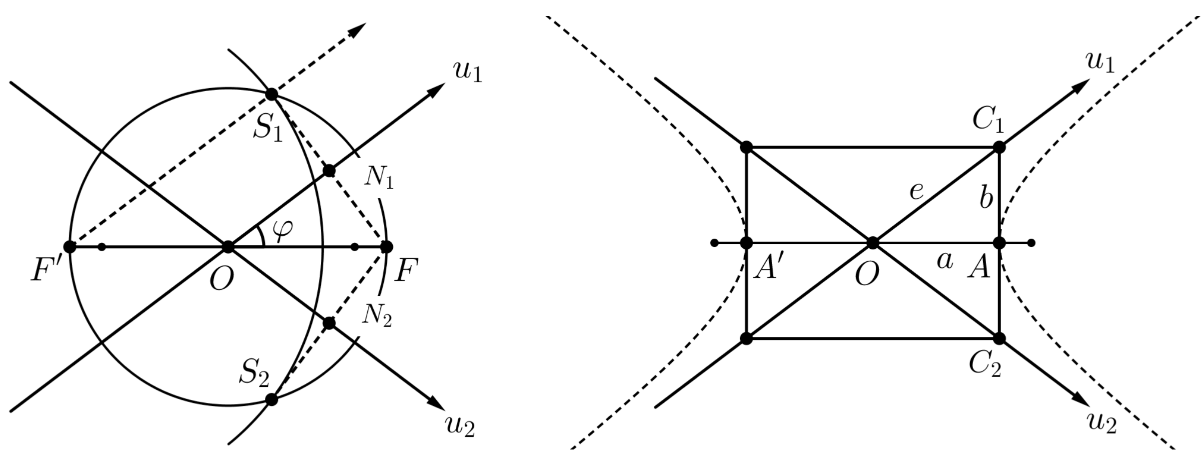
Teorem 5.13. *Skup nožišta okomica iz fokusa hiperbole na njezine tangente je kružnica sa središtem u središtu hiperbole i polumjerom jednakim velikoj poluosi hiperbole.*

Kružnica (O, a) iz Teorema 5.13 zove se *glavna kružnica* hiperbole.

Vrijedi i obrat Teorema 5.13.

Teorem 5.14. *Ako je F bilo koja točka izvan kružnice (O, a) i ako točka N opisuje tu kružnicu, onda okomica na pravac FN u točki N omata hiperbolu kojoj je O središte, F jedan fokus i a velika poluos.*

Primjer 5.2. Konstruirati tangentu hiperbole s fokusima F i F' i velikom osi $2a$ iz središta O te hiperbole. Konstruirati i dirališta tih tangenti.



Slika 5.11: Primjer 5.2

Rješenje. Kružnice $(F', 2a)$ i $(O, |OF|)$ sijeku se u dvije točke S_1 i S_2 jer je $|2a - e| < e$ (razlika polumjera je po apsolutnoj vrijednosti manja od udaljenosti središta kružnica).

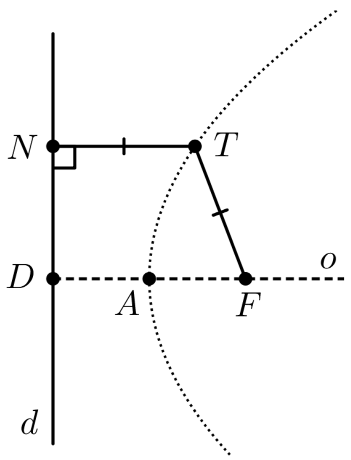
Tražene tangente u_1 i u_2 su redom simetrale dužina $\overline{FS_1}$ i $\overline{FS_2}$, a dirališta tih tangenti su njihova sjecišta s pravcima $F'S_1$ i $F'S_2$, tim redom. Ako su N_1 i N_2 redom nožišta okomica iz F na u_1 i u_2, tada su primjerice O i N_1 polovišta dužina $\overline{FF'}$ i $\overline{FS_1}$, respektivno, pa je $ON_1 \parallel F'S_1$, tj. pravci u_1 i $F'S_1$ sijeku se u beskonačnosti. Dakle, dirališta tangenata u_1 i u_2 su u beskonačnosti, a pravce u_1 i u_2 nazivamo *asimptote* hiperbole. U pravokutnom trokutu OFN_1 je $|ON_1| = \frac{1}{2}|F'S_1| = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$, pa je $|FN_1| = \sqrt{e^2 - a^2} = b$. Ako je φ kut asimptote s glavnom osi, tada je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|FN_1|}{|ON_1|} = \frac{b}{a}$. Zato pravci u_1 i u_2 prolaze kroz točke C_1 i C_2 u kojima okomice na glavnu os u glavnim tjemenima sijeku kružnicu s promjerom $\overline{FF'}$, vidi Sliku 5.11. ♢

5.3 Parabola

Neka je dana točka F i pravac d koji ne prolazi točkom F. Skup svih točaka T koje su jednako udaljene od točke F i pravca d zove se *parabola* s *fokusom* F i *direktrisom* (ili *ravnalicom*) d. Dužine $\overline{FT}$ i $\overline{NT}$, gdje je N nožište okomice iz T na d, zovu se *radijvektori* točke T. Ako za točku T vrijedi $|TF| < |TN|$, reći ćemo da je T *unutrašnja* točka parabole, a ako vrijedi $|TF| > |TN|$ kažemo da T *vanjska* točka parabole.

Iz definicije slijedi da je parabola simetrična s obzirom na okomicu o iz F na d. Pravac o zovemo *os* parabole.

Ako je D nožište okomice iz F na d, onda je polovište A dužine $\overline{FD}$ očito na paraboli i to je jedina točka osi koja je na paraboli. Točka A zove se *tjeme* parabole. Duljina $|AD| = |AF|$ označava se sa $\frac{p}{2}$, a duljina $|DF| = p$ je tzv. *parametar* parabole. Ako je T točka takva da je $DFTN$ kvadrat, tada je T na paraboli i vrijedi $|TF| = |TN| = p$.



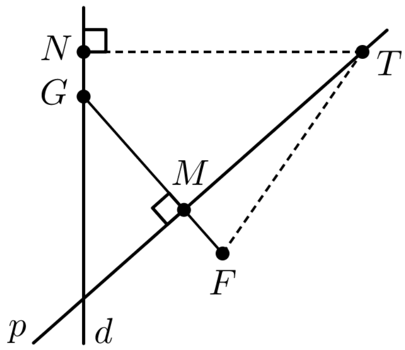
Slika 5.12: Direktrisa d, fokus F, os o, tjeme A te točka T na paraboli i njezini radijvektori

Teorem 5.15. *Parabola i pravac mogu imati najviše dvije zajedničke točke.*

Dokaz. Neka su F i d fokus i direktrisa parabole, a p dani pravac. Neka okomica iz F na p ima nožište M i neka siječe d u G (pretpostavljamo da p nije okomit na d). Neka je T bilo koja točka na p i N nožište okomice iz T na d. Iz

$$|GM|^2-|FM|^2 = |GT|^2-|MT|^2-(|FT|^2-|MT|^2) = |GT|^2-|FT|^2 = |GN|^2+|NT|^2-|FT|^2$$

slijedi $|NT|^2 - |FT|^2 = (|GM|^2 - |FM|^2) - |GN|^2$.



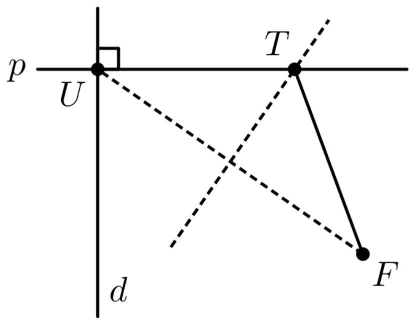
Slika 5.13: Ilustracija za dokaz Teorema 5.15 kad pravac nije okomit na direktrisu

Imamo ova tri slučaja.

1. slučaj. $|GM| > |FM|$. Tada je $|GM|^2 - |FM|^2 > 0$, pa postoje na pravcu d dvije točke N takve da je $|GN| = \sqrt{|GM|^2 - |FM|^2}$, tj. na pravcu p dvije točke T takve da je $|NT|^2 - |FT|^2 = 0$ ili $|NT| = |FT|$, što znači da pravac p siječe parabolu u dvije točke.

2. slučaj. $|GM| < |FM|$. Tada je $|GM|^2 - |FM|^2 < 0$, pa je $|NT|^2 - |FT|^2 < 0$ ili $|NT| < |FT|$ za svaku točku T pravca p, tj. pravac p ne siječe parabolu.

3. slučaj. $|GM| = |FM|$. Tada je $|NT|^2 - |FT|^2 = -|GN|^2$, pa za sve točke $N \in d \setminus \{G\}$ vrijedi $|NT| < |FT|$, a samo ako je $N = G$ vrijedi $|NT| = |FT|$. Dakle, pravac p ima s parabolom jednu jedinu zajedničku točku.



Slika 5.14: Ilustracija za dokaz Teorema 5.15 kad je pravac okomit na direktrisu

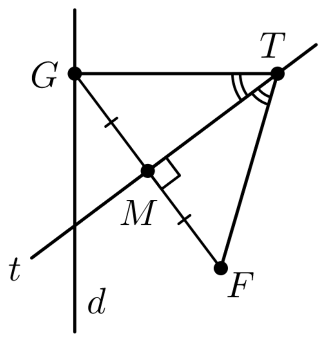
Neka je sada $p \perp d$. Neka je $U \in p \cap d$ i neka je T sjecište pravca p sa simetralom dužine $\overline{FU}$. Točka T je jedina točka pravca p takva da je $|FT| = |UT|$, tj. točka na paraboli. Dakle, tada p ima s parabolom jednu jedinu točku zajedničku. □

Pravac p iz 3. slučaja dokaza Teorema 5.15, koji nije paralelan s osi parabole i ima s parabolom jednu jedinu točku zajedničku, zovemo *tangenta* parabole, a njihovu zajedničku točku zovemo *diralište* od p.

Iz 3. slučaja dokaza Teorema 5.15 slijede odmah iduća tri teorema.

Teorem 5.16. *Neka je t tangenta parabole s fokusom F i direktrisom d. Ako je G točka simetrična F s obzirom na t, tada paralela s osi parabole kroz točku G siječe tangentu t u njezinom diralištu T.*

Teorem 5.17. *Tangenta parabole je simetrala kuta radijvektora dirališta te tangente.*



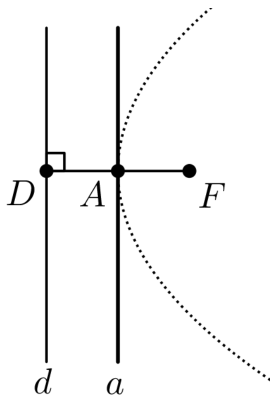
Slika 5.15: Teorem 5.17

Dokaz. Iz $|FM| = |NM|$ i $t \perp GF$ slijedi odmah $\sphericalangle FTM = \sphericalangle GTM$. $\square$

Teorem 5.18. *Skup suprotišta fokusa parabole s obzirom na sve njezine tangente je ravnalica te parabole.*

Ovdje je opet *suprotište* fokusa s obzirom na neku tangentu točka simetrična tom fokusu s obzirom na tu tangentu.

Ako je $D \in d$ i $FD \perp d$, tada je simetrala a dužine $\overline{FD}$ zbog Teorema 5.17 tangenta parabole. Dirалište te tangente je tjeme A parabole. Zato pravac a zovemo *tjemena* tangenta parabole. Sada iz Teorema 5.18 slijedi idući teorem.



Slika 5.16: Tjemena tangenta parabole

Teorem 5.19. *Skup nožišta okomica iz fokusa parabole na njezine tangente je tjemena tangenta te parabole.*

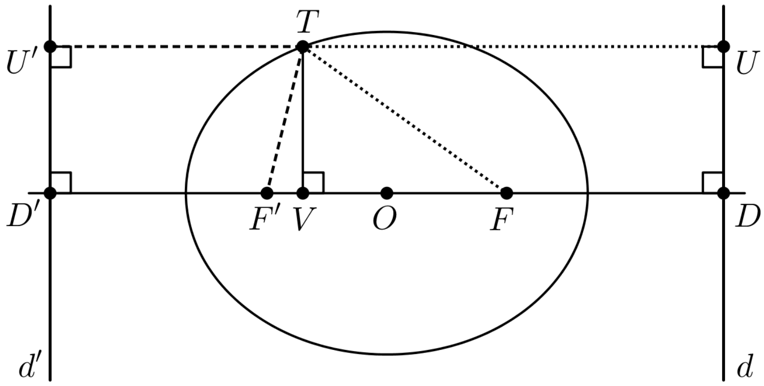
Vrijede i obrati Teorema 5.18 i 5.19.

Teorem 5.20. *Dana je točka F i pravac d koji ne prolazi tom točkom. Ako je G varijabilna točka pravca d, onda simetrala dužine $\overline{FG}$ omata parabolu s fokusom F i direktrisom d.*

Teorem 5.21. *Dana je točka F i pravac a koji ne prolazi tom točkom. Ako točka M opisuje pravac a, onda okomica na pravac FM u točki M omata parabolu s fokusom F i tjemenom tangentom a.*

Zadatak 5.3. Dana je parabola s fokusom F i ravnalicom d te točka T i pravac p. Konstruirajte tangentu parabole koja
(a) prolazi točkom T; (b) paralelna je s pravcem p; (c) okomita je na pravac p.

5.4 Direktrise elipse i hiperbole te ravninski presjeci kružnog stošca



Slika 5.17: Direktrise elipse

Neka su D i D' točke na glavnoj osi elipse takve da je $|OD| = |OD'| = \frac{a^2}{e}$ te neka su d i d' okomice na glavnu os u točkama D i D'. Neka je T bilo koja točka elipse i U, U', V nožišta okomica iz T redom na pravce d, d' i glavnu os. Neka su F i F' fokusi elipse. Tada imamo

$$\begin{aligned}|TV|^2 &= |TF|^2 - |FV|^2 = |TF|^2 - (|TU| - |DF|)^2 \\ &= |TF|^2 - |TU|^2 - |DF|^2 + 2|DF| \cdot |TU|,\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}|TV|^2 &= |TF'|^2 - |F'V|^2 = |TF'|^2 - (|TU'| - |DF|)^2 \\ &= |TF'|^2 - |TU'|^2 - |DF|^2 + 2|DF| \cdot |TU'|,\end{aligned}$$

odakle oduzimanjem slijedi

$$\begin{gathered}|TF|^2 - |TF'|^2 - (|TU|^2 - |TU'|^2) + 2|DF|(|TU| - |TU'|) = 0, \\ (|TF| - |TF'|)(|TF| + |TF'|) - (|TU| - |TU'|)(|TU| + |TU'| - 2|DF|) = 0 \\ 2a(|TF| - |TF'|) = (|TU| - |TU'|)(2|OD| - 2|DF|) \\ a(|TF| - |TF'|) = e(|TU| - |TU'|). \qquad (5.1)\end{gathered}$$

Osim toga je

$$\begin{gathered}a(|TF| + |TF'|) = a \cdot 2a = e \cdot 2\frac{a^2}{e} = e \cdot 2|OD| = e(|TU| + |TU|'), \\ a(|TF| + |TF'|) = e(|TU| + |TU'|). \qquad (5.2)\end{gathered}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem jednakosti (5.1) i (5.2) slijedi

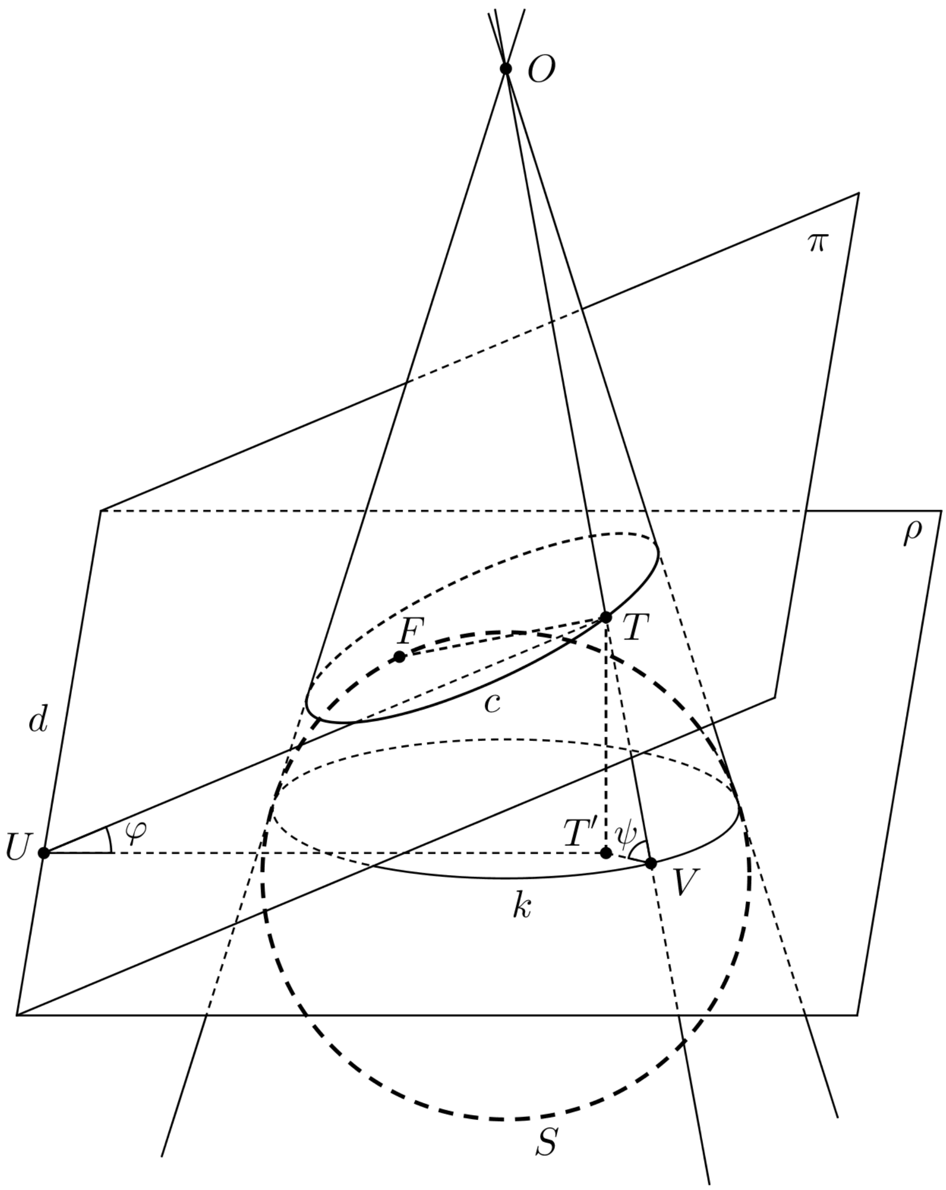
$$2a \cdot |TF| = 2e \cdot |TU|, \qquad 2a \cdot |TF'| = 2e \cdot |TU'|,$$

odnosno $\frac{|TF|}{|TU|} = \varepsilon$ i $\frac{|TF'|}{|TU'|} = \varepsilon$, gdje je $\varepsilon = \frac{e}{a}$ numerički ekscentricitet elipse. Dakle, pokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 5.22. *Ako su d i d' pravci okomiti na glavnu os i sijeku tu u os u točkama D i D', tim redom, takvima da je $|OD| = |OD'| = \frac{a^2}{e}$, onda za svaku točku T elipse vrijedi $\frac{|TF|}{|TU|} = \varepsilon$ i $\frac{|TF'|}{|TU'|} = \varepsilon$, gdje su U i U' redom nožišta okomica iz T na pravce d i d'.*

Isti takav teorem vrijedi i za hiperbolu. Pravci d i d' zovu se *direktrise* elipse, odnosno hiperbole. Dakle, i kod elipse i kod hiperbole je omjer udaljenosti bilo koje točke od fokusa i pripadne direktrise konstantan i jednak numeričkom ekscentricitetu. Za $\varepsilon < 1$ imamo elipsu, a za $\varepsilon > 1$ hiperbolu. Međutim, u slučaju $\varepsilon = 1$ imamo $\frac{|TF|}{|TU|} = 1$, a to vrijedi za parabolu. Prema tome, svaka od promatrane tri krivulje je skup točaka s konstantnim omjerom udaljenosti od dane točke i danog pravca.

Teorem 5.23. *Presjek uspravnog kružnog stošca ravninom koja ne prolazi vrhom stošca je elipsa, hiperbola ili parabola.*



Slika 5.18: Teorem 5.23

Dokaz. Neka je c presječna krivulja danog stošca i dane ravnine π. Neka je $\mathcal{S}$ jedna sfera upisana u stožac koja dira ravninu π u nekoj točki F. Sfera $\mathcal{S}$ dira stožac uzduž jedne kružnice k. Neka je ρ ravnina te kružnice. Ravnina ρ je okomita na os stošca. Neka je $\pi \cap \rho = d$ (ako je $\pi \parallel \rho$, onda je c očito kružnica, a to je specijalan slučaj elipse). Neka je φ kut ravnina π i ρ. Sve izvodnice stošca tvore isti kut ψ s ravninom ρ.

Neka je sada T bilo koja točka krivulje c i T' nožište okomice iz T na ρ, te U nožište okomice iz T' na d. Tada je d okomit na pravce TT' i UT', pa i na ravninu koju razapinju iz čega slijedi da je $TU \perp d$. Stoga je $\sphericalangle TUT' = \varphi$ te iz pravokutnog trokuta $UT'T$ dobivamo

$$|TU| = \frac{|TT'|}{\sin\varphi}. \tag{5.3}$$

Izvodnica stošca OT siječe kružnicu k u točki V i trokut $TT'V$ je pravokutan s kutom $\sphericalangle TVT' = \psi$. Zato je

$$|TV| = \frac{|TT'|}{\sin\psi}. \tag{5.4}$$

Kako je π tangencijalna ravnina, to je TF tangenta sfere $\mathcal{S}$, pa zato slijedi odmah

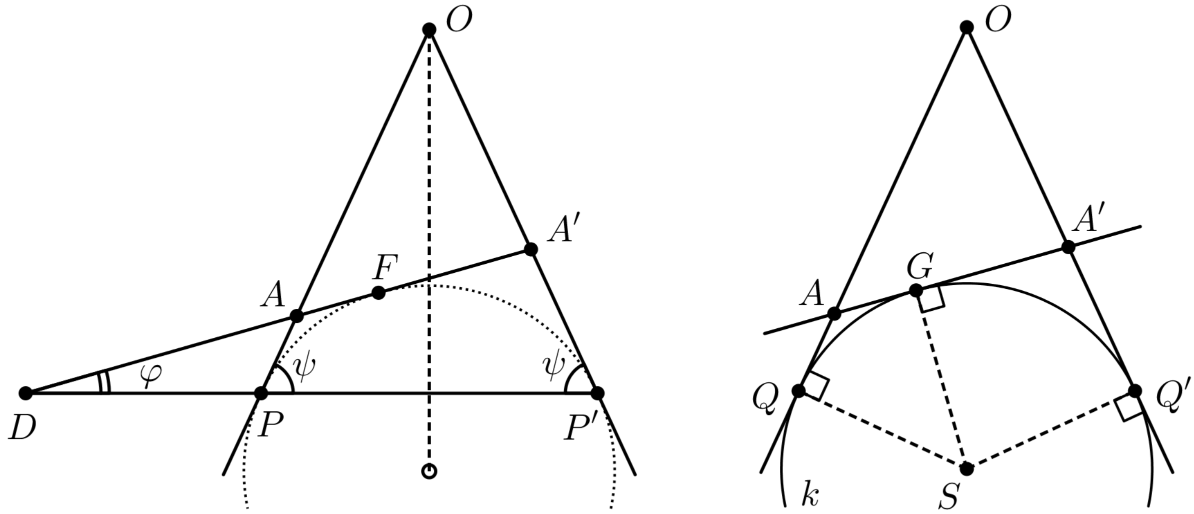
$$|TV| = |TF|. \tag{5.5}$$

Iz (5.3), (5.4) i (5.5) slijedi $\dfrac{|TF|}{|TU|} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi}$. Kako je $\varepsilon = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = const.$, to slijedi da je c elipsa, parabola ili hiperbola (već prema tome da li je $\varphi < \psi$, $\varphi = \psi$ ili $\varphi > \psi$) s fokusom F, pripadnom direktrisom d i numeričkim ekscentricitetom ε.

Vidimo da je promatrani presjek elipsa, parabola ili hiperbola ovisno o tome je li dana ravnina π paralelna s nijednom, jednom ili dvije izvodnice stošca. $\square$

Vrijedi i obrat.

Teorem 5.24. *Neka je dana elipsa, parabola ili hiperbola c s fokusom F, pripadnom direktrisom d i numeričkim ekscentricitetom ε. Neka je ψ dani šiljasti kut takav da je $\varepsilon \sin\psi \leqslant 1$. Tada postoji uspravni kružni stožac s kutom osi i izvodnica jednakim $90^\circ - \psi$ i ravnina koja siječe taj stožac baš po krivulji c.*



Slika 5.19: Teorem 5.24

Dokaz. Neka su A i A' glavna tjemena od c te D sjecište glavne osi i ravnalice d. Neka je φ kut takav da je $\sin\varphi = \varepsilon \sin\psi$, tj. da vrijedi $\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$. To je moguće jer je $\varepsilon \sin\psi \leqslant 1$. Promatrajmo ravninu ω kroz glavnu os krivulje c, okomitu na ravninu π te krivulje. U ravnini ω povucimo kroz D pravac koji s FD tvori kut φ i zatim kroz A, odnosno A' pravce koji s ovim pravcem tvore kutove ψ, tj. ako ovi pravci sijeku prethodni pravac u točkama P i P' da je $\sphericalangle APP' = \sphericalangle A'P'P = \psi$ kao na Slici 5.19, lijevo. Neka je $O \in AP \cap A'P'$.

Iz trokuta ADP i $A'DP'$ dobivamo

$$\frac{|AP|}{|AD|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \varepsilon = \frac{|AF|}{|AD|}, \qquad \frac{|A'P'|}{|A'D|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \varepsilon = \frac{|A'F|}{|A'D|},$$

odakle slijedi $|AP| = |AF|$ i $|A'P'| = |A'F|$. Označimo sa s poluopseg trokuta OAA'. Imamo

$$\begin{aligned} |OP| + |OP'| &= |OA| + |AP| + |OA'| + |A'P'| = |OA| + |AF| + |OA'| + |A'F| \\ &= |OA| + |OA'| + |AA'| = 2s, \end{aligned}$$

odakle zbog $|OP| = |OP'|$ slijedi $|OP| = |OP'| = s$.

Neka je sada k kružnica pripisana trokutu OAA' uz stranicu $\overline{AA'}$ i neka su Q, Q', G dirališta te kružnice s pravcima OA, OA', AA' tim redom, vidi Sliku 5.19, desno. Tada je $|AQ| = |AG|$, $|A'Q'| = |A'G|$, $|OQ| = |OQ'|$, pa imamo

$$|OQ| + |OQ'| = |OA| + |AG| + |OA'| + |A'G| = |OA| + |OA'| + |AA'| = 2s,$$

tj. $|OQ| = |OQ'| = s$. Stoga je $Q = P$ i $Q' = P'$, a zbog $|AG| = |AQ| = |AP| = |AF|$ slijedi i $G = F$. Prema tome kružnica k dira pravce OA, OA', AA' baš u točkama P, P', F.

Promatrajmo sada uspravni kružni stožac s vrhom O i dvije izvodnice OA i OA'. Sfera sa središtem u središtu S kružnice k i polumjerom jednakim polumjeru te kružnice upisana je u taj stožac i dira ravninu π u točki F, a stožac po kružnici s promjerom $\overline{PP'}$ u ravnini ρ koja prolazi kroz PP' i okomita je na ravninu ω. Ravnine ρ i π sijeku se po pravcu d. Ravnine π i ρ tvore kut φ, a izvodnice stošca sijeku ravninu ρ pod kutom ψ. Zato prema Teoremu 5.23 ravnina π siječe promatrani stožac po elipsi, paraboli ili hiperboli s fokusom F, pripadnom direktrisom d i numeričkim ekscentricitetom $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \varepsilon$, a to je nužno krivulja c. $\square$

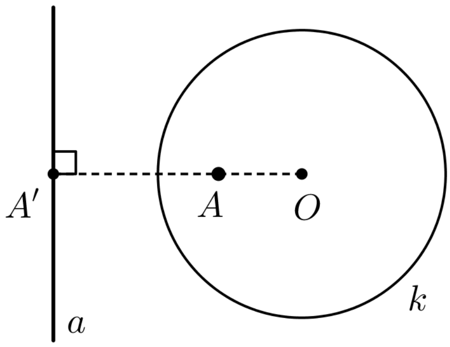
5.5 Pascalov i Brianchonov teorem

Neka je dana kružnica $k(O, r)$. *Polaritet* s obzirom na kružnicu k je bijekcija između skupa točaka i skupa pravaca takva da za pridružene elemente A, a vrijedi

$$OA \cdot OA' = r^2 \quad \text{i} \quad OA \perp a,$$

gdje je $A' \in OA \cap a$, tj. A, A' su inverzne točke za inverziju $[O, r^2]$. Točki O pridružujemo beskonačno daleki pravac, a pravcu a kroz O pridružujemo beskonačno daleku točku pravca okomitog na a. Pridružene elemente A, a zovemo *pol*, odnosno *polara* jedno drugome s obzirom na kružnicu k.

Očito je da je točki na k pridružena tangenta od k u toj točki.

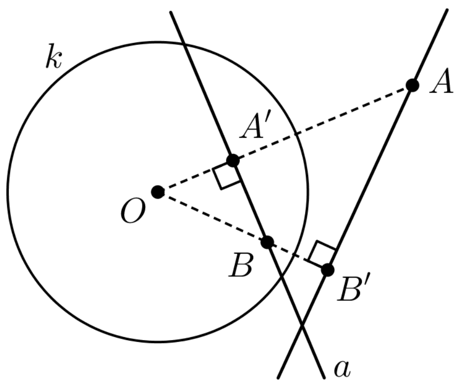


Slika 5.20: Točka A je pol pravca a, pravac a je polara točke A

Teorem 5.25. *Ako je točka B na polari a točke A s obzirom na kružnicu k, onda je i točka A na polari b točke B s obzirom na k.*

Dokaz. Tvrdnju teorema lako je provjeriti ako je $A = O$ ili $B = O$, pa u nastavku pretpostavljamo da su A i B različite od O. Jednostavni slučaj kada je A beskonačno daleka točka također preskačemo, pa uzimamo da A ne leži na beskonačno dalekom pravcu.

Neka je $A' \in OA \cap a$ i B' nožište okomice iz A na OB. Tada su pravokutni trokuti $OB'A$ i $OA'B$ slični, pa je $|OA| : |OB'| = |OB| : |OA'|$, tj. $|OB| \cdot |OB'| = |OA| \cdot |OA'| = r^2$. Dakle, AB' je polara od B s obzirom na k, tj. $AB' = b$. ☐



Slika 5.21: Teorem 5.25

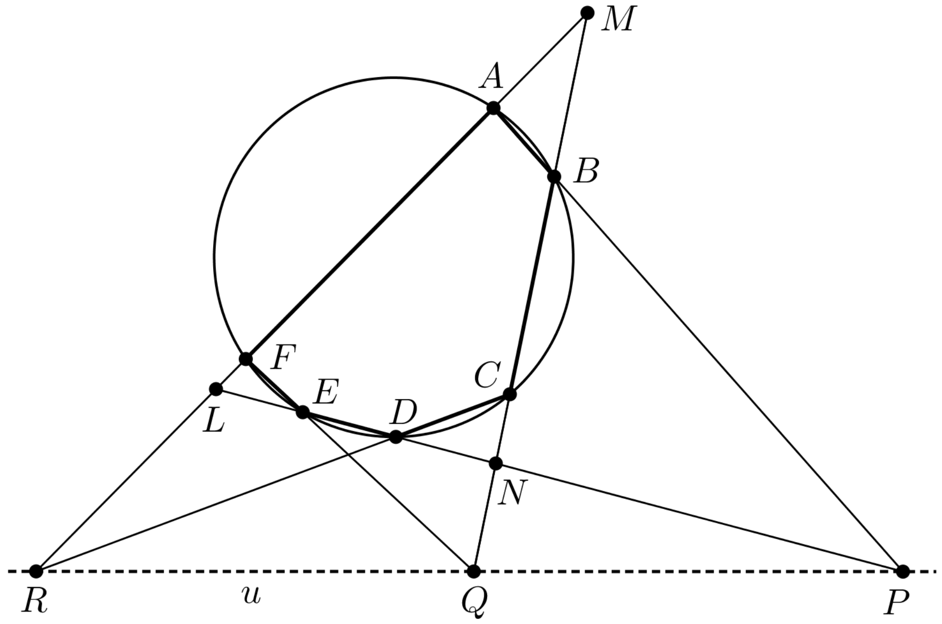
Korolar 5.26. *Ako su A, a, odnosno B, b pol i polara s obzirom na kružnicu k i $c = AB$, $C \in a \cap b$, tada su i C, c pol i polara s obzirom na k.*

Dokaz. Neka je c polara od C. Tada iz $C \in a, b$ prema Teoremu 5.25 slijedi $A, B \in c$, tj. $c = AB$. ☐

U nastavku najprije dokazujemo Pascalov i Brianchonov teorem za kružnice.

Teorem 5.27. *Parovi suprotnih stranica šesterokuta upisanog kružnici sijeku se u tri kolinearne točke.*

Dokaz. Neka je $ABCDEF$ dani šesterokut i $P \in AB \cap DE$, $Q \in BC \cap EF$, $R \in CD \cap FA$ te $L \in DE \cap FA$, $M \in AF \cap BC$, $N \in BC \cap DE$. Primijenimo Lemu 3.1 (Menelajev



Slika 5.22: Teorem 5.27

teorem) na trokut LMN i točke A, B, P, odnosno R, C, D, odnosno F, Q, E. Imamo

$$\frac{LA}{MA} \cdot \frac{MB}{NB} \cdot \frac{NP}{LP} = 1, \qquad \frac{LR}{MR} \cdot \frac{MC}{NC} \cdot \frac{ND}{LD} = 1, \qquad \frac{LF}{MF} \cdot \frac{MQ}{NQ} \cdot \frac{NE}{LE} = 1.$$

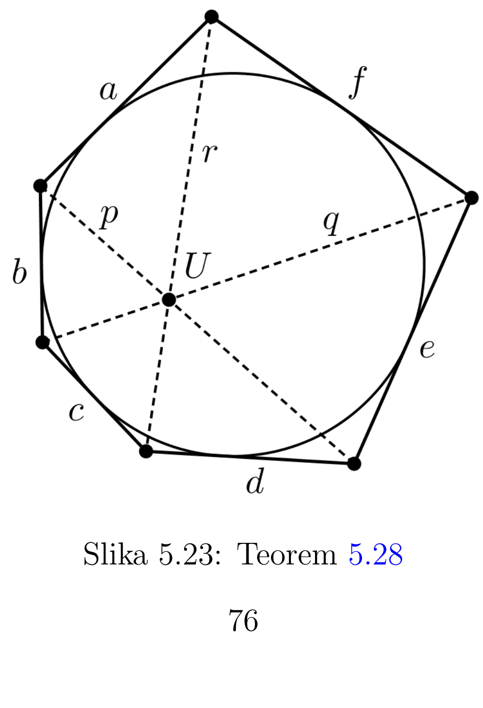
Kako je

$$LA \cdot LF = LD \cdot LE, \qquad MB \cdot MC = MA \cdot MF, \qquad ND \cdot NE = NB \cdot NC,$$

to množenjem prethodnih jednakosti dobivamo

$$\frac{NP}{LP} \cdot \frac{LR}{MR} \cdot \frac{MQ}{NQ} = 1.$$

Prema Menelajevom teoremu odavde slijedi da su točke P, Q, R kolinearne. $\square$



Slika 5.23: Teorem 5.28

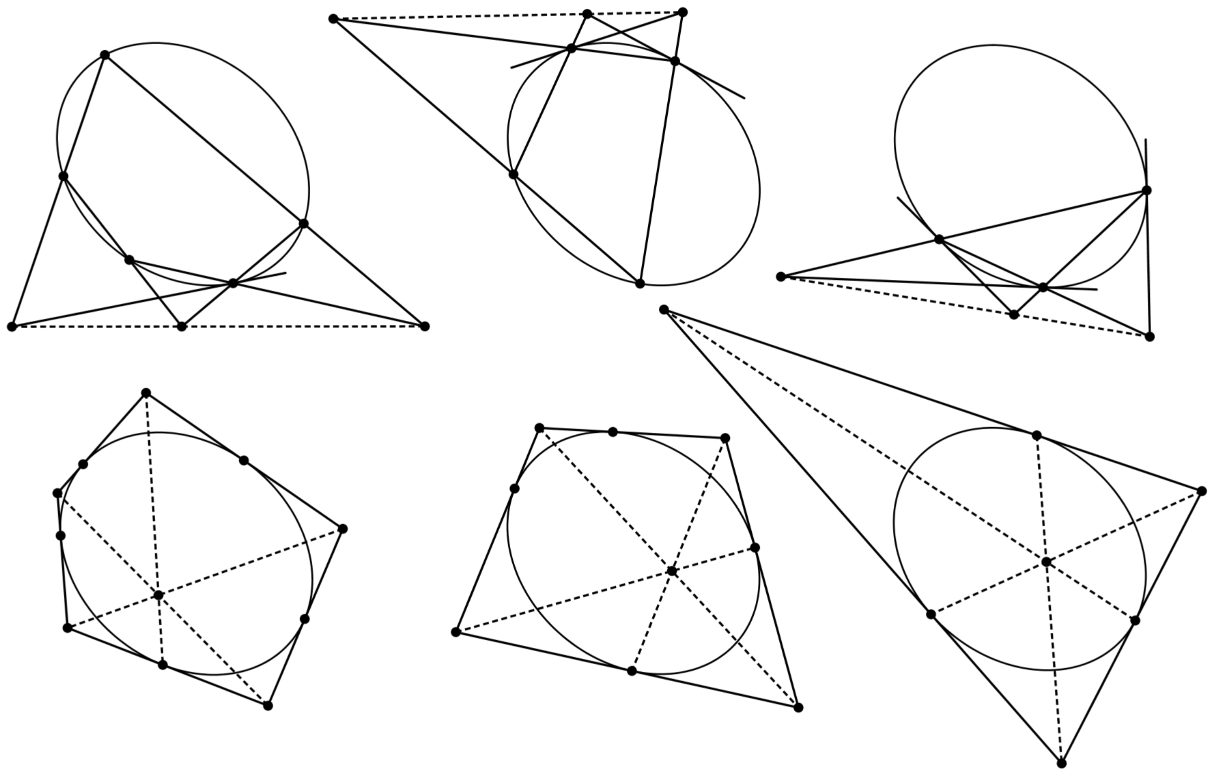
Teorem 5.28. *Spojnice suprotnih vrhova šesterokuta opisanog kružnici prolaze jednom točkom.*

Dokaz. Neka su a, b, c, d, e, f stranice danog šesterokuta i p, q, r spojnice parova suprotnih vrhova $a \cap b, d \cap e$; $b \cap c, e \cap f$; $c \cap d, f \cap a$. Primijenimo polaritet s obzirom na promatranu kružnicu k. Tada se pravci a, b, c, d, e, f preslikavaju u svoja dirališta A, B, C, D, E, F s kružnicom k, a točke $a \cap b, d \cap e, b \cap c, e \cap f, c \cap d, f \cap a$ se prema Korolaru 5.26 preslikavaju u točke $P \in AB \cap DE$, $Q \in BC \cap EF$, $R \in CD \cap FA$. Kako prema Teoremu 5.27 točke P, Q, R leže na jednom pravcu u, to prema Korolaru 5.26 pravci p, q, r prolaze polom U pravca u s obzirom na k. □

Iz Teorema 5.23 slijedi da je centralna projekcija kružnice elipsa, parabola ili hiperbola i da se svaka takva krivulja može dobiti centralnom projekcijom iz kružnice. Centralna projekcija preslikava točku u točku, pravac u pravac, tangentu u tangentu, pa iz Teorema 5.27 i 5.28 slijede odmah idući teoremi.

Teorem 5.29 (Pascalov teorem)**.** *Parovi suprotnih stranica šesterokuta upisanog elipsi, paraboli ili hiperboli sijeku se u tri kolinearne točke.*

Teorem 5.30 (Brianchonov teorem)**.** *Spojnice parova suprotnih vrhova šesterokuta opisanog elipsi, paraboli ili hiperboli imaju zajedničku točku.*

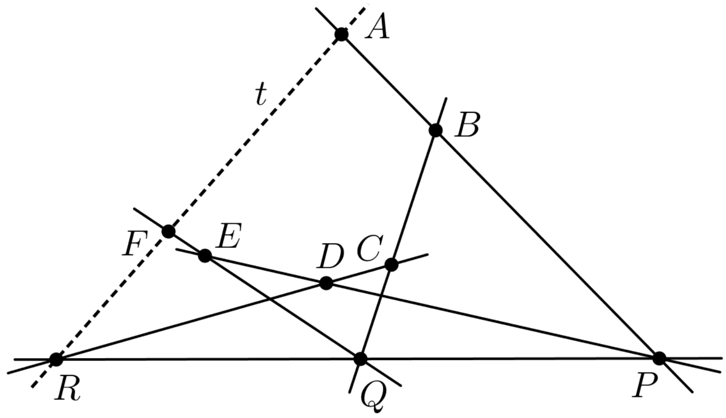


Slika 5.24: Ilustracija Pascalovog i Brianchonovog teorema ako se neki susjedni vrhovi, odnosno stranice podudaraju

Ako dva susjedna vrha upisanog šesterokuta padnu zajedno, dobivamo upisani peterokut i tangentu u jednom vrhu koja igra ulogu šeste stranice. Ako dva i dva susjedna vrha padnu zajedno, dobivamo upisani četverokut zajedno s tangentama u dva vrha. Ako dva po dva susjedna vrha padnu zajedno, dobivamo upisani trokut i tangente u njegovim vrhovima.

Analogno, kod opisanog šesterokuta mogu pasti zajedno po dvije susjedne stranice, pa dobivamo opisani peterokut i jedno dirالište stranica, opisani četverokut i dva dirališta stranica ili opisani trokut i dirališta stranica. Pascalov i Brianchonov teorem vrijede u svakom od ovih slučajeva uz izvjesni dogovor o oznakama stranica i vrhova.

Primjer 5.4. Dane su točke A, B, C, D, E od kojih nikoje tri nisu kolinearne i pravac t točkom A. Konstruirati drugo sjecište F pravca t s krivuljom 2. stupnja koja prolazi kroz točke A, B, C, D, E.



Slika 5.25: Primjer 5.4

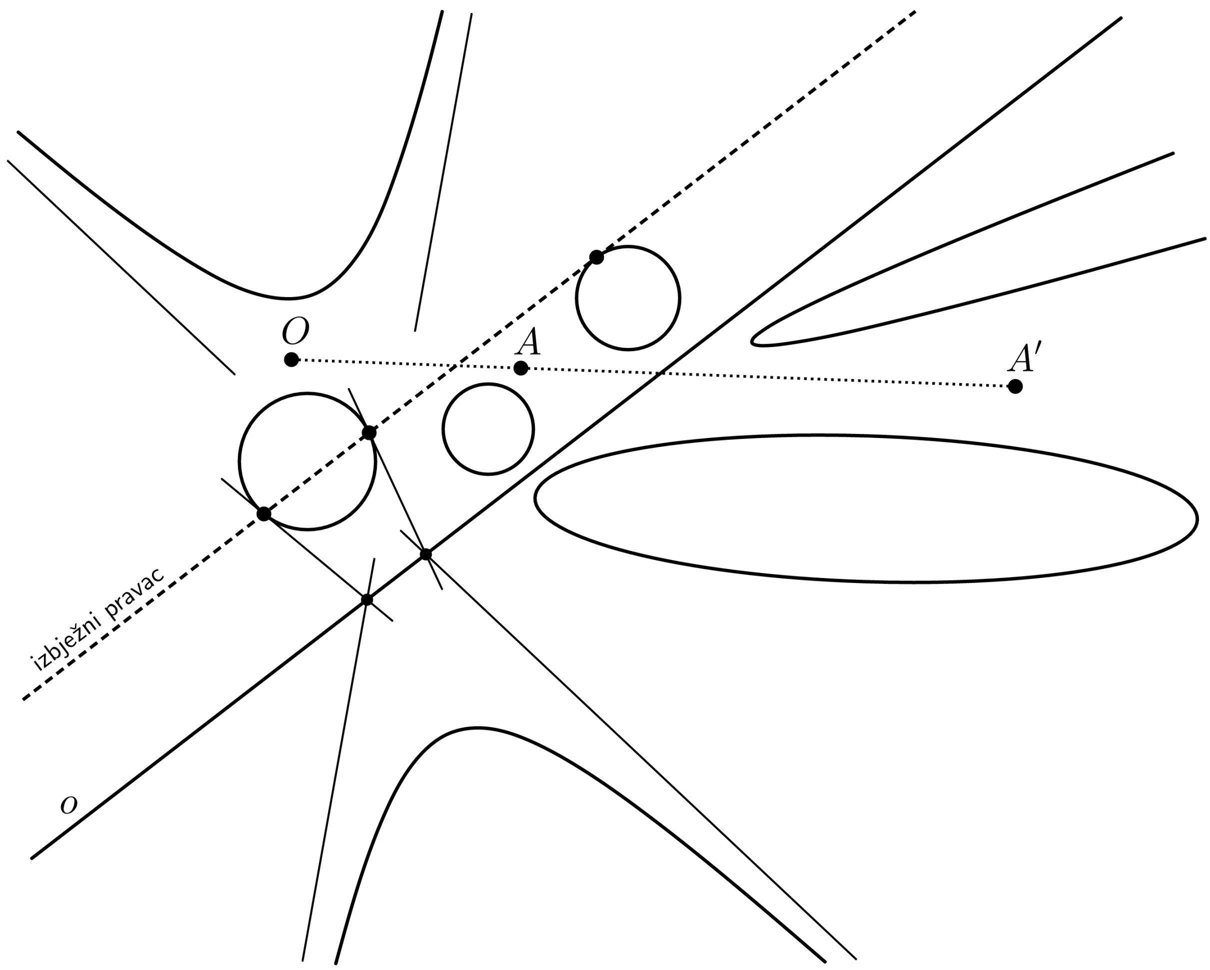
Rješenje. Neka je $P \in AB \cap DE$, $R \in CD \cap t$, $Q \in BC \cap PR$, $F \in t \cap QE$. Tada je F traženo sjecište što slijedi iz primjene Pascalovog teorema na šesterokut $ABCDEF$. $\diamondsuit$

Ako u prethodnom primjeru pravac t rotira oko točke A, onda dobivamo svaki puta po jednu novu točku F krivulje drugog stupnja. Odavde slijedi da je krivulja 2. stupnja određena s bilo kojih 5 svojih točaka. Slično se, primjenom Brianchonovog teorema, pokazuje da je krivulja 2. stupnja određena s bilo kojih 5 svojih tangenti.

5.6 Krivulje 2. stupnja kao perspektivno kolinearne slike kružnica

Neka je dana kružnica k i neka (ne nužno perspektivna) kolineacija κ ravnine. Tada ćemo promatrati krivulju $k' = \kappa(k)$. Dokazat ćemo da je k' krivulja 2. stupnja.

Odaberimo na kružnici k čvrste točke A, B, C, D, E. Neka je T varijabilna točka te kružnice. Promatrat ćemo šesterokut $ABCDET$. Prema Pascalovom Teoremu 5.27 slijedi da su točke $P \in AB \cap DE$, $Q \in BC \cap ET$, $R \in CD \cap TA$ kolinearne. Primjenom kolineacije κ slijedi da su i točke $P' = \kappa(P)$, $Q' = \kappa(Q)$, $R' = \kappa(R)$ također kolinearne, a osim toga je $P' \in A'B' \cap D'E'$, $Q' \in B'C' \cap E'T'$, $R' \in C'D' \cap T'A'$, gdje je $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$, $C' = \kappa(C)$, $D' = \kappa(D)$, $E' = \kappa(E)$, $T' = \kappa(T)$. Točke A', B', C', D', E' su čvrste, a za varijabilnu točku T' vrijedi uvijek da se parovi suprotnih stranica šesterokuta $A'B'C'D'E'T'$ sijeku u tri kolinearne točke. Zato prema obratu Teorema 5.29, koji se dokazuje lako kontradikcijom, slijedi da točka T' leži na krivulji 2. stupnja određenoj točkama A', B', C', D', E'. Dakle, k' je ta krivulja 2. stupnja.



Slika 5.26: Slika kružnice po perspektivnoj kolineaciji je elipsa, hiperbola ili parabola

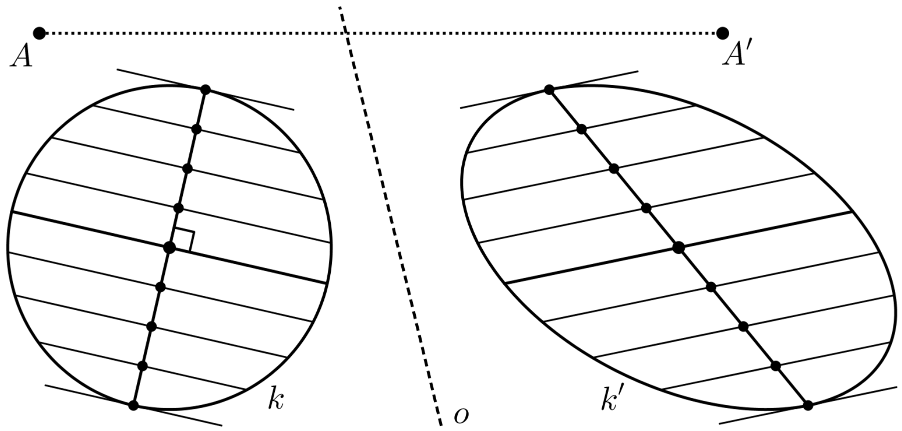
Krivulja k' je elipsa, parabola ili hiperbola već prema tome da li kružnica k ima s izbježnim pravcem (tj. praslikom beskonačno dalekog pravca) kolineacije κ točno 0, 1 ili 2 zajedničke točke, tj. da li k' ima s beskonačno dalekim pravcem 0, 1 ili 2 zajedničke točke.

Očito je da κ preslikava tangentu od k u tangentu od k'. U slučaju da kružnica k siječe izbježni pravac u dvije točke, tangente na k u tim točkama preslikavaju se u asimptote hiperbole k'.

5.7 Elipsa kao perspektivno afina slika kružnice

Ako je centar perspektivne kolineacije u beskonačnosti, dobivamo perspektivnu afinost. Kod nje su slike beskonačno dalekih točaka i samo njih opet beskonačno daleke točke. Zato je perspektivno afina slika kružnice jedna krivulja 2. stupnja koja nema zajedničkih točaka s beskonačno dalekim pravcem (jer je i kružnica takva), a to je elipsa. Dakle, perspektivno afina slika kružnice je elipsa.

Promatrajmo kružnicu k i njezinu perspektivno afinu sliku, elipsu k'. Tangente od k preslikavaju se u tangente od k'. Budući da perspektivna afinost čuva djelišni omjer, to ona polovište dužine preslikava u polovište slike te dužine. Kako svi promjeri kružnica imaju zajedničko polovište u centru kružnice, to i njihove slike imaju zajedničko polovište.

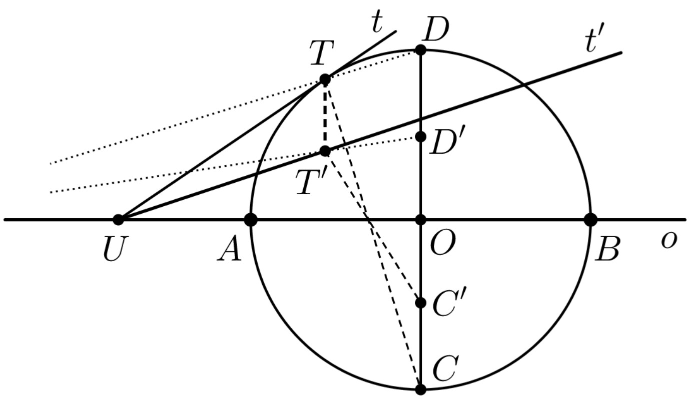


Slika 5.27: Okomiti promjeri kružnice preslikavaju se po perspektivnoj afinosti u konjugirane promjere elipse

To su *promjeri elipse*, a njihovo zajedničko polovište je centar elipse. Promjer kružnice raspolavlja sve na njega okomite tetive, a tangente u krajevima tog promjera paralelne su s tim tetivama. Zato, jer perspektivna afinost čuva i paralelnost, promjer elipse raspolavlja sve tetive elipse koje su paralelne tangentama u krajevima toga promjera. Među tim tetivama jedan je promjer kružnice, odnosno elipse. Dakle, radi se o dva okomita promjera kružnice koji se preslikavaju u dva promjera elipse. Očito je da su oba promjera kružnice ravnopravna, tj. svaki od njih raspolavlja tetive paralelne drugome i paralelan je s tangentama u krajevima drugoga. Zato isto svojstvo vrijedi i za pridružene promjere elipse. Slike okomitih promjera kružnice zovemo *konjugirani promjeri* elipse. Dakle, konjugirani promjeri elipse imaju svojstvo da svaki od njih raspolavlja tetive paralelne s drugim i paralelan je s tangentama u krajevima drugoga.

Konjugirani promjeri elipse općenito nisu okomiti, osim u jednom slučaju kad se radi o osima.

Mnoge zadaće u vezi s elipsom možemo riješiti primjenom perspektivne afinosti. Osnovna ideja je zgodno odabrati perspektivnu afinost tako da promatrana elipsa bude slika neke kružnice po toj afinosti, te da konstrukcije budu što jednostavnije. Zato za os afinosti odabiremo glavnu ili sporednu os elipse kada su osi poznate, a kad su dani konjugirani promjeri tada za os afinosti uzimamo jedan od tih promjera. Zatim dane elemente preslikamo, riješimo odgovarajuću zadaću za kružnicu i rješenja preslikamo natrag.



Slika 5.28: Primjer 5.5

Primjer 5.5. Zadana je dužina $\overline{AB}$ i pravac t' koji ne siječe tu dužinu. Konstruirati elipsu kojoj je AB jedna os, a t' tangenta. Odrediti dirałište te tangente.

Rješenje. Uzmimo pravac AB za os afinosti, a smjer afinosti neka je okomit na os (no to nije bitno). Promatrana elipsa neka je slika kružnice s promjerom $\overline{AB}$. Neka je $U \in AB \cap t'$ i t tangenta iz U na k s diralištem T. Okomica iz T na AB siječe t' u traženom diralištu T' jer je T, T' par pridruženih točaka. Promjer $\overline{CD}$ kružnice k okomit na AB preslikava se u malu os $\overline{C'D'}$ elipse k'. Dalje se mogu konstruirati pojedine točke elipse. $\diamondsuit$

Poglavlje 6

Konstrukcije izvedive ravnalom i šestarom

Na početku ovih predavanja spomenuti su klasični konstrukcijski problemi: trisekcija kuta, duplikacija kocke i kvadratura kruga. Sada ćemo vidjeti zašto se ti problemi ne mogu riješiti ravnalom i šestarom. Također ćemo analizirati koji se pravilni mnogokuti mogu konstruirati ravnalom i šestarom.

Ravnalom i šestarom možemo crtati pravce (zapravo dužine) i kružnice. Promatrajmo sve u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Na početku su dane neke točke čije koordinate znamo. Primjerice, za problem konstrukcije pravilnog n-terokuta možemo smatrati da je dana duljina stranice tog mnogokuta ili eventualno polumjer njemu opisane kružnice te tu duljinu uzeti za jediničnu, tj. jedan kraj dane dužine je $(0, 0)$, a drugi kraj je $(1, 0)$.

Znamo da je sada dopuštena uzastopna primjena ovih postupaka:

- spajanje dvije konstruirane točke, odnosno konstrukcija pravca,
- konstrukcija kružnice s danim središtem kroz danu točku,
- određivanje sjecišta dva pravca,
- određivanje sjecišta kružnice i pravca,
- određivanje sjecišta dviju kružnica,

Računski se to svodi na određivanje jednadžbe pravca, jednadžbe kružnice ili rješavanje sustava jednadžbi. Pogledajmo redom navedene postupke.

Pravac koji prolazi točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) ima jednadžbu

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ tj. } \quad (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Vidimo da je to linearna jednadžba u varijablama x i y s koeficijentima koji su cjelobrojni polinomi u x_1, y_1, x_2, y_2.

Kružnica sa središtem u točki (x_1, y_1) koja prolazi točkom (x_2, y_2) ima jednadžbu

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \text{ tj. } \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

gdje su a, b, c polinomi s cjelobrojnim koeficijentima u koordinatama danih točaka x_1, y_1, x_2, y_2.

Radi jednostavnosti zapisa uzmimo sada da su nam dane jednadžbe pravaca zapisane u eksplicitnom obliku, $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$. Ako je $a_1 \neq a_2$, onda se ti pravci sijeku u točki $\left(\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}, \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{a_2 - a_1}\right)$. Vidimo da su koordinate sjecišta racionalne funkcije (s cjelobrojnim koeficijentima) u koeficijentima danih pravaca a_1, b_1, a_2, b_2.

Ako je dan pravac s jednadžbom $y = ax+b$ i kružnica s jednadžbom $x^2+y^2+cx+dy+e = 0$, onda sjecišta (x_1, y_1) i (x_2, y_2) nalazimo uvrštavajući y iz prve jednadžbe u drugu te dobivamo

$$\begin{aligned}
x^2 + (ax + b)^2 + cx + d(ax + b) + e &= 0, \\
(a^2 + 1)x^2 + (2ab + ad + c)x + b^2 + bd + e &= 0, \\
Ax^2 + Bx + C &= 0 \quad (A = a^2 + 1,\ B = 2ab + ad + c,\ C = b^2 + bd + e), \\
x_{1,2} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad y_{1,2} = ax_{1,2} + b.
\end{aligned}$$

Traženje sjecišta dviju kružnica s jednadžbama

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

očito je ekvivalentno traženju sjecišta kružnice $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i pravca $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$, pa se svodi na prethodni slučaj.

Iz prethodnog razmatranja zaključujemo da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 6.1. *Ravnalom i šestarom mogu se konstruirati one i samo one točke čije se koordinate u pravokutnom koordinatnom sustavu izražavaju pomoću koordinata danih točaka primjenom zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i vađenja drugog korijena.*

Podsjetimo se algebarske strukture koju nazivamo polje, ali samo u slučaju podskupova polja realnih brojeva na kojem imamo standardne operacije $+$ i $\cdot$. U tom slučaju je *polje* naprosto neprazan podskup S od $\mathbb{R}$ koji je zatvoren na oduzimanje i dijeljenje (pa zato i zbrajanje i množenje), tj. za sve $a \in S$ i $b \in S \setminus \{0\}$ su $a - b, \frac{a}{b} \in S$. Lako je vidjeti da je primjerice skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ polje, a skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ nije polje. Štoviše, svako polje u $\mathbb{R}$ očito sadrži $\mathbb{Q}$. Naime, ako je $a \neq 0$ element iz tog polja, onda ono mora sadržavati

$$0 = a - a, \quad -a = 0 - a, \quad 1 = \frac{a}{a}, \quad -1 = \frac{-a}{a}, \quad m = 1 + 1 + \cdots + 1, \quad \frac{m}{n}, \quad -\frac{m}{n}$$

za sve prirodne brojeve m, n.

Neka je sada K polje dobiveno iz skupa koordinata danih točaka nekog konstruktivnog zadatka konačnim brojem primjena operacija: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje (kažemo da je K generirano danim skupom brojeva). Npr. ako su sve te koordinate racionalni brojevi, onda je $K = \mathbb{Q}$. Neka je $r \in K$ bilo koji element takav da $\sqrt{r} \notin K$. Ako je $K = \mathbb{Q}$, takav je primjerice $r = 2$. Iz skupa $K \cup \{\sqrt{r}\}$ ponovno prethodnim postupkom dobivamo polje $K_1 \supset K$, i to je najmanje polje koje sadrži $K \cup \{\sqrt{r}\}$. Nije teško vidjeti da je $K_1 = \{A + B\sqrt{r} : A, B \in K\}$. Naime, desni skup očito mora biti sadržan u K_1, pa je dovoljno provjeriti da je taj skup zatvoren na oduzimanje i dijeljenje. Za oduzimanje je tvrdnja jasna, pa za proizvoljne $a, b, c, d \in K$ promatramo

$$\frac{a + b\sqrt{r}}{c + d\sqrt{r}} = \frac{a + b\sqrt{r}}{c + d\sqrt{r}} \cdot \frac{c - d\sqrt{r}}{c - d\sqrt{r}} = \frac{ac - bdr}{c^2 - d^2r} + \frac{bc - ad}{c^2 - d^2r}\sqrt{r}.$$

što je traženog oblika. Polje K_1 nazivamo *kvadratno proširenje* polja K i označavamo $K(\sqrt{r})$. Ako je sada $r_1 \in K_1$ bilo koji element takav da $\sqrt{r_1} \notin K_1$, tada istim postupkom dolazimo do proširenja $K_2 = K_1(\sqrt{r_1})$ od K_1. Postupak možemo nastaviti te dobivamo niz proširenja

$$K_{n+1} = \{A + B\sqrt{r_n} \,:\, A, B \in K_n\} = K_n(\sqrt{r_n}), \quad r_n \in K_n,\ \sqrt{r_n} \notin K_n.$$

Prethodni teorem sada možemo iskazati ovako.

Teorem 6.2. *Ravnalom i šestarom mogu se konstruirati one i samo one točke čije koordinate pripadaju nekom polju koje se dobije konačnim nizom kvadratnih proširenja iz polja koje je generirano koordinatama danih točaka.*

6.1 Duplikacija kocke i trisekcija kuta

Duplikacija kocke je klasičan konstruktivni problem. Treba ravnalom i šestarom konstruirati brid kocke čiji je volumen dvostruko veći od volumena dane kocke. Ako je a duljina brida dane kocke te x duljina brida tražene kocke, tada je $x^3 = 2a^3$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $a = 1$, pa se duplikacija kocke svodi na problem konstrukcije rješenja jednadžbe

$$x^3 - 2 = 0 \tag{6.1}$$

ako je zadana jedinična duljina.

Trisekcija kuta je drugi klasičan konstruktivni problem. Ravnalom i šestarom treba podijeliti dani kut na tri sukladna dijela. Uočimo da za neke kutove ovaj problem ima rješenje. Na primjer, ako je dan pravi kut, lako konstruiramo pravce koji ga dijele na tri jednaka dijela. No, pokazat ćemo da to općenito nije moguće.

Uz danu jediničnu duljinu, kut α možemo konstruirati ako i samo ako možemo konstruirati duljinu $\sin\alpha$ ili $\cos\alpha$. Iz De Moivreove formule je

$$\begin{aligned}\cos(3\varphi) &= \mathrm{Re}(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = \mathrm{Re}\left((\cos\varphi + i\sin\varphi)^3\right)\\ &= (\cos\varphi)^3 - 3\cos\varphi(\sin\varphi)^2 = 4(\cos\varphi)^3 - 3\cos\varphi,\end{aligned}$$

pa je $\cos\alpha = 4(\cos\frac{\alpha}{3})^3 - 3\cos\frac{\alpha}{3}$. Označimo li $x = 2\cos\frac{\alpha}{3}$, ova jednakost glasi $x^3 - 3x = 2\cos\alpha$.

Uočimo da je primjerice moguća trisekcija kuta od $54°$ jer je $2\cdot 54° - 90° = 18° = \frac{1}{3}\cdot 54°$ iako još ne znamo konstruirati ni $54°$ ni $18°$ (vidjet ćemo postupak u zadnjem potpoglavlju).

Mi ćemo pokazati da za kut $\alpha = 60°$ (koji, jasno, znamo konstruirati) nije moguće konstruirati pripadni x. U tom slučaju je $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, pa jednadžba glasi

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \tag{6.2}$$

Teorem 6.3. *Ako kubna jednadžba s racionalnim koeficijentima nema rješenja u polju racionalnih brojeva, onda nema rješenja ni u jednom polju dobivenom iz $\mathbb{Q}$ konačnim brojem kvadratnih proširenja.*

Dokaz. Neka je

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{6.3}$$

promatrana kubna jednadžba, gdje je $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Pretpostavka je da (6.3) nema racionalnih rješenja. Pretpostavimo sada da ta jednadžba ima rješenje $x_1 \in Q_n$ u polju Q_n dobiveno iz $\mathbb{Q}$ n-terostrukim kvadratnim proširivanjem, ali da nema rješenje u polju Q_{n-1}. Tada je $x_1 = A + B\sqrt{R}$, gdje je $A, B, R \in Q_{n-1}$, ali $\sqrt{R} \notin Q_{n-1}$. Budući da je x_1 rješenje od (6.3), to vrijedi

$$(A + B\sqrt{R})^3 + a(A + B\sqrt{R})^2 + b(A + B\sqrt{R}) + c = 0$$
$$(A^3 + 3AB^2R + aA^2 + aB^2R + bA + c) + (3A^2B + B^3R + 2aAB + bB)\sqrt{R} = 0.$$

Odavde slijedi nužno

$$3A^2B + B^3R + 2aAB + bB = 0 \quad \text{te zato} \quad A^3 + 3AB^2R + aA^2 + aB^2R + bA + c = 0 \tag{6.4}$$

jer bi inače bilo

$$\sqrt{R} = -\frac{A^3 + 3AB^2R + aA^2 + aB^2R + bA + c}{3A^2B + B^3R + 2aAB + bB} \in Q_{n-1}$$

što je suprotno pretpostavci. Iz (6.4) slijedi

$$(A^3 + 3AB^2R + aA^2 + aB^2R + bA + c) - (3A^2B + B^3R + 2aAB + bB)\sqrt{R} = 0$$
$$(A - B\sqrt{R})^3 + a(A - B\sqrt{R})^2 + b(A - B\sqrt{R}) + c = 0,$$

pa je i $x_2 = A - B\sqrt{R}$ također rješenje (6.3). Vrijedi $x_1 \neq x_2$ jer bi inače bilo $B = 0$, tj. $x_1 = A \in Q_{n-1}$. Neka je x_3 treće rješenje dane jednadžbe. Tada prema Vièteovoj formuli (koju dobijemo uspoređivanjem koeficijenata uz x^2), imamo $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, pa je $x_3 = -a - (x_1 + x_2) = -a - 2A \in Q_{n-1}$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da jednadžba (6.3) nema rješenja u Q_{n-1}. $\square$

Konačno, kako bismo dokazali da se trisekcija kuta i duplikacija kocke ne mogu riješiti ravnalom i šestarom, dovoljno je pokazati da jednadžbe (6.1) i (6.2) nemaju racionalnih korijena. Tada će tražene tvrdnje slijediti iz Teorema 6.3 i 6.2.

Sjetimo se jednostavnog nužnog kriterija za racionalne nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Ako je $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ nultočka polinoma $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, onda p dijeli slobodni član a_0 dok q dijeli vodeći koeficijent a_n.

Kad bi $\frac{p}{q}$ bila racionalna nultočka polinoma $x^3 - 2$, onda bi $q \mid 1$ i $p \mid -2$ te stoga $\frac{p}{q} \in \{-2, -1, 1, 2\}$. No, lako se provjeri da nijedan od navedenih brojeva nije nultočka, pa (6.1) nema rješenja u $\mathbb{Q}$.

Kad bi $\frac{p}{q}$ bila racionalna nultočka polinoma $x^3 - 3x - 1$, onda bi $q \mid 1$ i $p \mid -1$ te stoga $\frac{p}{q} \in \{-1, 1\}$. No, lako se provjeri da nijedan od navedenih brojeva nije nultočka, pa (6.2) nema rješenja u $\mathbb{Q}$.

Zaključujemo da je nemoguće elementarno, tj. koristeći samo ravnalo i šestar, duplicirati kocku, odnosno trisektirati kut od 60°.

6.2 Kvadratura kruga

Kvadratura kruga je treća klasična zadaća u kojoj se traži da se ravnalom i šestarom konstruira kvadrat čija je površina jednaka površini danog kruga. Brojni pokušaji rješavanja ove zadaće nisu uspjeli, pa se već u 15. stoljeću došlo do ideje da je zadaća nerješiva (Leonardo da Vinci i ostali) i pokušalo se to dokazati.

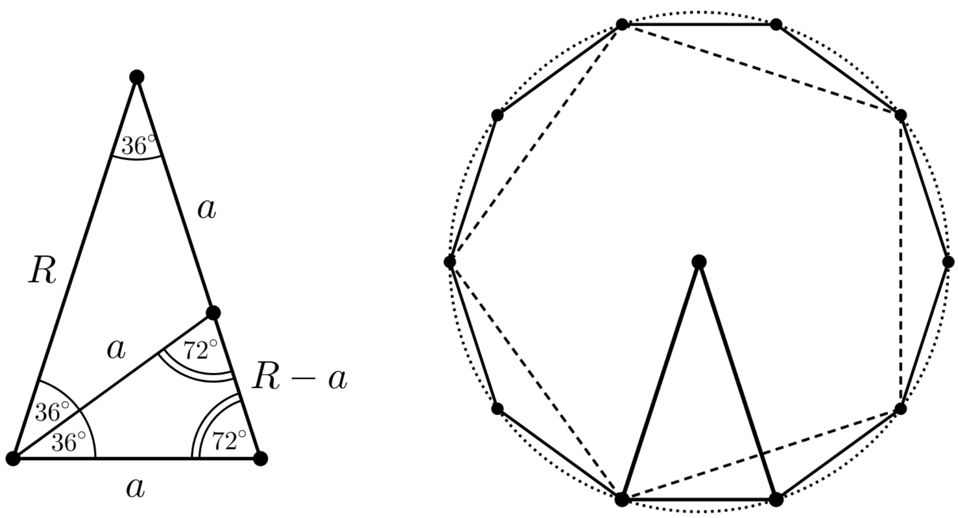
Površina kruga polumjera r mora biti jednaka površini kvadrata čiju stranicu a moramo konstruirati. zato je $r^2\pi = a^2$. Ako je $r = 1$, onda je $a = \sqrt{\pi}$, pa se kvadratura kruga svodi na konstrukciju broja $\sqrt{\pi}$. Opseg pripadne kružnice je $2r\pi$. Kako je $a^2 = r^2\pi = 2r\pi \cdot \frac{r}{2}$, to je očito da je kvadratura kruga ekvivalentna problemu rektifikacije kružnice, tj. konstrukcije dužine čija je duljina jednaka opsegu dane kružnice. Ako je $r = 1$, tada je opseg jednak 2π, pa se rektifikacija kružnice svodi na konstrukciju broja π.

J. Lambert je 1766. godine dokazao da je π iracionalan broj, ali to još ne rješava problem kvadrature kruga. Treba dokazati da broj π ne pripada ni jednom polju koje se iz $\mathbb{Q}$ dobiva konačnim nizom kvadratnih proširenja, tj. da se ne može dobiti rješavanjem konačno mnogo kvadratnih jednadžbi. F. von Lindemann je 1882. dokazao još više, tj. da π nije algebarski, nego transcendentan broj, odnosno da se ne može dobiti rješavanjem nikakvih algebarskih jednadžbi (preciznije, π nije nultočka nijednog nenul polinoma s cjelobrojnim koeficijentima). Dokaz je vrlo težak i ne možemo ga na ovom mjestu izložiti.

Prema tome, kvadratura kruga je nemoguća koristeći samo ravnalo i šestar.

6.3 O konstrukcijama pravilnih mnogokuta

Znamo konstruirati pravilni n-terokut za $n = 3$ (jednakostranični trokut), $n = 4$ (kvadrat) i $n = 6$. Budući da možemo koristiti homotetiju, svejedno je koja od sljedećih duljina je pritom zadana: stranica, polumjer opisane ili polumjer upisane kružnice tog n-terokuta.



Slika 6.1: Ilustracija uz konstrukciju pravilnog deseterokuta i peterokuta

Konstrukcija pravilnog n-terokuta ekvivalentna je konstrukciji kuta $\frac{360°}{n}$ jer je to središnji kut nad stranicom takvog mnogokuta upisanog u kružnicu. Lako je udvostručiti dani kut ili ga podijeliti na dva jednaka dijela. Zato, ako znamo konstruirati pravilni n-terokut, očito ćemo znati konstruirati i pravilne mnogokute sa $2n$, $4n$ i općenito $2^k n$ (gdje je $k \in \mathbb{N}$) stranica. Vrijedi i obratno, tj. za paran n iz poznavanja konstrukcije pravilnog n-terokuta, znamo konstruirati i pravilni $\frac{n}{2}$-terokut.

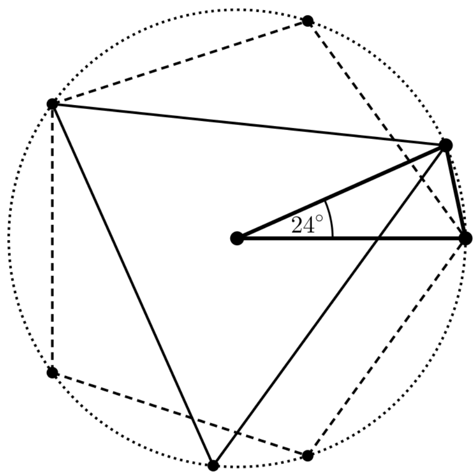
Primjerice, za $n = 10$ je potrebno konstruirati jednakokračni trokut s osnovicom duljine a i kutom nasuprot osnovice $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Označimo sa R duljinu kraka tog trokuta. Iz sličnosti trokutâ naznačenih na Slici 6.1 lijevo, vidimo da je $R : a = a : (R - a)$, pa je $R^2 - aR - a^2 = 0$, odnosno $R = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$ što nije teško konstruirati koristeći algebarsku metodu. Dakle, znamo konstruirati sve pravilne mnogokute sa $2^k \cdot 5$ stranica, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$. Iz početne napomene je jasno da znamo konstruirati i pravilne mnogokute sa 2^{k+2} ili $2^k \cdot 3$ stranica, $k \in \mathbb{N}_0$. S druge strane, pravilni deveterokut ne možemo konstruirati jer mu je središnji kut 40°. Pokazali smo da ne možemo konstruirati kut 20°, pa zato ni kut 40°, kod dokaza da je nemoguće trisektirati kut od 60°.

Vidimo da je ključno pitanje koji se pravilni n-terokuti mogu konstruirati ako je n neparan prirodan broj. Ovaj problem možemo još pojednostavniti uzevіši za n samo potencije prostih brojeva. Naime, ako su m i n relativno prosti prirodni brojevi, onda možemo konstruirati pravilni m-terokut i pravilni n-terokut ako i samo ako možemo konstruirati pravilni mn-terokut. Drugim riječima, možemo konstruirati oba kuta $\frac{360^\circ}{m}$ i $\frac{360^\circ}{n}$ ako i samo ako možemo konstruirati kut $\frac{360^\circ}{mn}$. Jedan smjer je jasan jer uvijek možemo konstruirati cjelobrojni višekratnik danog kuta. Drugi smjer u tvrdnji dokazujemo koristeći činjenicu da za relativno proste brojeve m i n postoje cijeli brojevi k i ℓ takvi da je $km + \ell n = 1$. Onda je

$$k \cdot \frac{360^\circ}{n} + \ell \cdot \frac{360^\circ}{m} = \frac{360^\circ}{mn},$$

pa ako možemo konstruirati kutove $\frac{360^\circ}{m}$ i $\frac{360^\circ}{n}$, očito možemo konstruirati i kut $\frac{360^\circ}{mn}$.

Primjerice, za $m = 3$, $n = 5$, imamo $2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$, pa je $2 \cdot \frac{360^\circ}{5} - \frac{360^\circ}{3} = \frac{360^\circ}{15}$, te stoga možemo konstruirati pravilni petnaesterokut.



Slika 6.2: Pomoću pravilnog peterokuta i jednakostraničnog trokuta, konstruiramo pravilni petnaesterokut

Neka je, dakle, n potencija neparnog prostog broja. Radi jednostavnijeg izlaganja pretpostavit ćemo da je n neparan prost broj, a općeniti slučaj je sličan. Uz zadanu jediničnu duljinu, konstrukcija kuta $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ je ekvivalentna konstrukciji duljine $v = 2\cos\varphi = z + \frac{1}{z}$, gdje je $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Budući da je $z^2 - vz + 1 = 0$, vidimo da se može konstruirati v ako i samo ako se može konstruirati z (tj. njegov realni i imaginarni dio). Stoga se pravilni n-terokut može konstruirati ako i samo ako se ravnalom i šestarom može konstruirati broj $z \neq 1$ koji je korijen jednadžbe $z^n - 1 = 0$. To znači da je

$$0 = \frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1.$$

Koristeći Eisensteinov kriterij pokazuje se da je polinom $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$, pa Teorem 6.2 i još neke osnovne činjenice o proširenjima polja koje ovdje ne možemo navoditi, povlače da je $n-1$ potencija broja 2, tj. $n = 2^\ell + 1$. Iz formule $a^t + b^t = (a+b)(a^{t-1} - a^{t-2}b + a^{t-3}b^2 - \cdots + b^{t-1})$ koja vrijedi za neparne prirodne brojeve t i činjenice da je n prost, lako se dobiva da ℓ ne može imati neparnih prostih faktora, odnosno $\ell = 2^k$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$. Dakle, n je prost broj oblika $2^{2^k} + 1$. Takve proste brojeve zovemo prostim Fermatovim brojevima.

Potpuni rezultat navodimo bez dokaza.

Teorem 6.4 (Gauss–Wantzelov teorem). *Konstrukcija pravilnog n-terokuta ravnalom i šestarom moguća je ako i samo ako je $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_s$, gdje su k i s nenegativni cijeli brojevi i p_i-ovi su (za $s > 0$) različiti prosti Fermatovi brojevi.*

Za sada je poznato samo pet prostih Fermatovih brojeva i to su upravo $2^{2^k}+1$ za $0 \leqslant k \leqslant 4$, tj. $3, 5, 17, 257, 65537$. Dakle, trenutno znamo točno $2^5 - 1 = 31$ pravilnih n-terokuta s neparnim n koje možemo konstruirati koristeći ravnalo i šestar.