

KLASA:

URBROJ:

Zagreb,

**IZVEDBENI PLAN ZA A.G. 2024./2025. POSLIJEDIPLOMSKOG SVEUČILIŠNOG STUDIJA MATEMATIKE NA PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKOM FAKULTETU SVEUČILIŠTA U ZAGREBU**

Zagreb, 25. lipanj 2024.



## **SADRŽAJ**

<b>1. KOLEGIJI U A.G. 2024/2025 .....</b>	<b>4</b>
<b>2. SADRŽAJI IZBORNIH KOLEGIJA .....</b>	<b>4-36</b>
<b>3. SYLLABUSES OF ELLECTIVE COURSES .....</b>	<b>37-66</b>
<b>4. ZNANSVENI SEMINARI .....</b>	<b>108</b>
<b>5. PRAVILA STUDIRANJA.....</b>	<b>112</b>

## **A. Osnovni kolegiji (dvosemestralni)**

1. Bojan Basrak, *Vjerojatnost*
2. Nenad Antić, *Analiza*
3. Mladen Vuković i Marko Horvat, *Matematička logika i računarstvo*
4. Josip Tambača i Boris Muha, *Parcijalne diferencijalne jednačbe*
5. Miljenko Marušić i Ivica Nakić, *Numerička matematika*
6. Pavle Pandžić i Maja Resman, *Geometrija i topologija*
7. Dražen Adamović i Igor Ciganović, *Algebra*

## **B. Izborni kolegiji**

1. Nenad Antić, Cauchyjeva zadaća u općoj teoriji relativnosti (60 sati)
2. Matija Bašić, Teorija homotopije operada (30 sati)
4. Matija Bašić, Željka Milin Šipuš, Istraživački okviri u matematičkom obrazovanju. (30 sati)
5. Zvonimir Bujanović, Hrvoje Planinić, Randomizirani algoritmi u numeričkoj linearnoj algebri i strojnom učenju (60 sati)
6. Zlatko Drmač, Podacima pogonjena numerička analiza nelinearne dinamike (30 sati)
7. Nina Kamčev, Vjerojatnosna kombinatorika (30 sati)
- 8.** Matija Kazalicki, Primjena teorije presjeka u enumerativnoj geometriji (60 sati)
9. Slaven Kožić, Verteks-algebarske metode u teoriji reprezentacija (60 sati)
9. Matko Ljulj , Boris Muha, Homogenizacija i topološka optimizacija (60 sati)
10. Rudi Mrazović, Slučajne šetnje i pakiranje kružnicama (30 sati)

11. Ninoslav Truhar, Krešimir Veselić, Opća teorija linearnih prigušenih sustava I i II (60 sa

<b>NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE</b>		
<b>SEMESTAR STUDIJA:</b> zimski i ljetni		
<b>NAZIV KOLEGIJA:</b> Cauchyjeva zadaća u općoj teoriji relativnosti		
<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>
predavanja	2	Nenad Antičić

<b>vježbe</b>	0	
<b>seminar</b>	0	
<b>ECTS BODOVI:</b>		
<p><b>CILJ KOLEGIJA:</b> Albert Einstein je 1915. zapisao jednačbe polja opće relativnosti, te se pri opravdanju tvrdnje da se gravitacijski valovi šire brzinom svjetlosti, koristio sustavom valnih jednačbi. U nekoliko dekada nakon toga mnogi vrhunski matematičari, uključujući Hilberta i Lanczosa, su pokušali postaviti te Einsteinove ideje na solidnije matematičke temelje, bez konkretnog uspjeha. Tek je Yvonne Fourès-Bruhat (kasnije Choquet-Bruhat) 1952. pokazala da se Einsteinove jednačbe mogu zapisati kao Cauchyjeva zadaća, te je pokazala lokalno postojanje i jedinstvenost. Naravno, to je bio samo prvi korak, jer je potrebno te rezultate proširiti do globalne valjanosti, te pokazati stabilnost.</p> <p>Cilj ovog kolegija je upoznati studente s osnovama matematičke formulacije teorije opće relativnosti, te iskaza temeljnih jednačbi polja kao Cauchyjeve zadaće, pritom povezujući osnove fizikalne teorije s Lorenzovom diferencijalnom geometrijom i modernom teorijom (ne)linearnih hiperboličkih jednačbi.</p>		

**NASTAVNI SADRŽAJI:**

- Osnovni postulati posebne teorije relativnosti, Lorentzove pretvorbe, relativistička mehanika
- Formalizam tenzorskog računa
- Osnovni postulati opće teorije relativnosti, jednačbe polja
- Opća relativnost izvedena iz varijacijskog principa, tenzor energije-impulsa, Maxwellove jednačbe
- Mnogostrukosti i Lorentzova geometrija
- Karakterizacija globalne hiperboličnosti, jedinstvenost rješenja linearne valne jednačbe
- Nužni uvjeti na početne podatke u općoj relativnosti
- Lokalno postojanje rješenja Cauchyjeve zadaće
- Cauchyjeva stabilnost i postojanje globalnog hiperboličkog razvoja

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVANJA:** pohađanje predavanja, rješavanje zadataka za domaću zadaću, držanje seminara

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** prisustvo na predavanjima, rješavanje zadaća, održani seminari

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** uspješno održan napredniji seminar



**PRETPOSTAVLJENO PREDZNAJJE:** Poželjno je osnovno predznanje iz diferencialne geometrije i parcijalnih diferencialnih jednažbi. Kolegij će biti u suštini samodostatan, te se ne pretpostavlja poznavanje opće teorije relativnosti. Ovisno o predznanju slušača, po potrebi će se dopuniti matematičko predznanje (diferencijalne geometrije i parcijalnih diferencialnih jednažbi).

**OBVEZNA LITERATURA:**

Hans Ringström: The Cauchy problem in general relativity, EMS Publishing House, 2009.

Ray d'Inverno, James Vickers: Introducing Einstein's relativity - A deeper understanding, 2. izdanje, Oxford University Press, 2022.

Yvonne Choquet-Bruhat, Cecile DeWitt-Morette, Margaret Dillard-Bleick: Analysis, manifolds and physics, Part 1: Basics (Revised edition), North-Holland, 1982.

<b>NAZIV STUDIJA:</b> ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
<b>SEMESTAR STUDIJA:</b> zimski (30 sati)		
<b>NAZIV KOLEGIJA:</b> Teorija homotopije operada		
<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>
predavanja	2	Matija Bašić

<b>konzultacije</b>	<b>2</b>	Matija Bašić
<b>seminar</b>	<b>2</b>	Matija Bašić
<b>ECTS BODOVI: upisuje administracija studija</b>		
<p><b>CILJ KOLEGIJA:</b></p> <p>Cilj kolegija je omogućiti studentima upoznavanje s apstraktnom teorijom homotopije danom formalizmom modelnih kategorija tipičnim za homološku algebru i algebarsku topologiju. Glavni objekt proučavanja su (topološke) operade, centralne u teoriji prostora petlji u algebarskoj topologiji, različitim tipovima algebri, matematičkoj fizici (teoriji deformacije) i diferencijalnoj topologiji. U kursu će biti obrađeni raznim modeli operada i beskonačno-operada koristeći algebarsku i topološku perspektivu.</p>		
<p><b>NASTAVNI SADRŽAJI:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Algebarski pristup operadama kao generalizacijama kategorija.</li> </ul>		

- Operada malih kocaka i operada malih diskova. Teorem aditivnosti. Primjene na višestruke prostore petelji i konfiguracijske prostore.
- Uvod u modelne kategorije. Modelne strukture na topološkim prostorima, simplicijalnim skupovima i lančanim kompleksima.
- Modeli za beskonačno-operade. Dendroidalni skupovi.

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVANJA:**

Studenti su obavezni pročitati nekoliko recentnih relevantnih članaka u kojima se navedene teorije i metode uvode i koriste. Tijekom izvođenja kolegija sudjeluju u aktivnostima i izrađuju zadatke vezane uz članke u formi manjih domaćih projekata. Na kraju kolegija, predaju malu teorijsku studiju na neku temu temeljenu na obrađenom materijalu i dodatnoj relevantnoj literaturi, koju izlažu u obliku (barem jednog) seminara.

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:**

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** Prezentacija u obliku (barem jednog) seminara.

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNAJJE:** --

## **OBAVEZNA LITERATURA**

1. E. R. Fadell, S. Y. Husseini (2001) *The Geometry and Topology of Configuration Spaces*, Springer.
2. P. Goerss, J. Jardine (1999) *Simplicial Homotopy Theory*, Springer Basel.
3. G. Heuts, I. Moerdijk (2022) *Simplicial and Dendroidal Homotopy Theory*, Springer.
4. M. Hovey (1999) *Model Categories*, AMS.
5. J.-L. Loday, B. Vallette (2012) *Algebraic Operads*, online book.  
[https://pure.mpg.de/rest/items/item\\_3121746\\_1/component/file\\_3121747/content](https://pure.mpg.de/rest/items/item_3121746_1/component/file_3121747/content)
6. P. May (1972) *The Geometry of Iterated Loop spaces*, Springer.

## **DOPUNSKA LITERATURA:**

1. P. Boavida, M. Weiss (2018) *Spaces of smooth embeddings and configuration categories*, Journal of Topology, Vol. 11, Issue 1.

2. F. Callegaro, et al. (2016) *Configuration Spaces – Geometry, Topology and Representation Theory*, Springer.
3. T. Dyckerhoff, M. Kapranov (2019) *Higher Segal Spaces*, Springer.
4. G. Friedman, *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*, ArXiv: 0809.4221.
5. B. Fresse (2009) *Modules over Operads and Functors*, Springer.
6. T. Willwacher (2015) *M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck-Teichmüller Lie algebra*, *Inventiones mathematicae*, Vol. 200.

<b>NAZIV STUDIJA:</b> ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
<b>SEMESTAR STUDIJA:</b> zimski (30 sati)		
<b>NAZIV KOLEGIJA:</b> Istraživački okviri u matematičkom obrazovanju		
<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>

<b>predavanja</b>	<b>2</b>	Matija Bašić, Željka Milin Šipuš
<b>konzultacije</b>	<b>2</b>	Matija Bašić, Željka Milin Šipuš
<b>seminar</b>	<b>2</b>	Matija Bašić, Željka Milin Šipuš
<b>ECTS BODOVI: upisuje administracija studija</b>		
<b>CILJ KOLEGIJA:</b>		
Cilj kolegija je omogućiti studentima upoznavanje s odabranim relevantnim teorijskim okvirima i metodama istraživanja u matematičkom obrazovanju.		
<b>NASTAVNI SADRŽAJI:</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kratka povijest istraživanja u matematičkom obrazovanju. Organizacija ICMI. Felix Klein kao istraživač u matematičkom obrazovanju.</li> </ul>		



- Teorijski okviri: Freudenthal - Realistično matematičko obrazovanje, Tall – Napredno matematičko mišljenje, Brousseau – Teorija didaktičkih situacija, Chevallard – Antorpološka teorija didaktike.
- Metode istraživanja obrazovanja: Strategije za prikupljanje podatka, izrada upitnika, uporaba statističkih testova, tehnike intervjuiranja. Vjerojatnosni modeli u obrazovanju: Teorija odgovora na zadatak.
- Odabrane teme u podučavanju i učenju algebre, diferencijalnog računa, geometrije, vjerojatnosti. Razvoj koncepta (Sfard, Dubinsky).

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVANJA:**

Studenti su obavezni pročitati nekoliko recentnih relevantnih članaka u kojima se navedene teorije i metode uvode i koriste. Tijekom izvođenja kolegija sudjeluju u aktivnostima i izrađuju zadatke vezane uz članke u formi manjih domaćih projekata. Na kraju kolegija, predaju malu teorijsku studiju na neku temu iz matematičkog obrazovanja temeljenu na obrađenom materijalu i dodatnoj relevantnoj literaturi, koju izlažu u obliku (barem jednog) seminara.

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** Izvršene obaveze tijekom nastave.

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** Pisana teorijska studija matematičke teme i prezentacija u obliku (barem jednog) seminara.

**PRETPOSTAVLIJENO PREDZNAJJE: --**

**OBAVEZNA LITERATURA**

7. Bikner-Ahsbabs, A. & Prediger, S. (Eds.) (2014) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*, Springer.
8. Bond, T.G., & Fox, C. M. (1991). *Applying the Rasch Model: Fundamental Measurement in the Human Sciences*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ.
9. Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970 – 1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
10. Chevallard, Y. (1981). *The Didactics of Mathematics: Its Problematic and Related Research*. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 2(1), 146–158.
11. Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th ed), Routledge Publishers, (Taylor & Francis group), Oxford, UK.
12. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing, Dordrecht.
13. ICMI Study, book series of International Commission on Mathematical Instruction
14. English, L.D., & Kirshner, D. (2016) *Handbook of International Research in Mathematics*, Routledge.
15. Lerman, S. (Ed.) (2014) *Encyclopedia of Mathematics education*, Springer.

16. Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Springer.

**DOPUNSKA LITERATURA:**

7. Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education. *Notices of the AMS*, 46(11), 1377–1385.
8. Boaler J. (2012). From psychological imprisonment to intellectual freedom – the different roles that school mathematics can take in students' lives, 12th international congress on mathematical education, Seoul, Korea
9. Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: Bikner-Ahsbals, A., & Predinger, S. (Eds.) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*, Springer
10. Bosch, M., Gascón, J. & Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and the ATD. *Educ Stud Math* 95, 39–52.
11. Flavell, J. (1967). *The developmental psychology of Jean Piaget*. New York: D. Van Nostrand Company.

12. Freudenthal, H. (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing, Dordrecht
13. Freudenthal H (1991) *Revisiting mathematics education*. China lectures. Kluwer, Dordrecht
14. Schoenfeld A.H. (2002) *Research methods in (mathematics) education*. In: English, L. (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education*. Erlbaum, Mahwah
15. Sfard, A. (2008) *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press, Cambridge
16. Tall, D., & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ Stud Math* 12:151–169
17. van Hiele, P. M. (2004) *A child's thought and geometry*. In: Carpenter, T.P., Dossey J.A., & Koehler J.L. (Eds.) *Classics in mathematics education research*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

**NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI  
STUDIJ MATEMATIKE**

**SEMESTAR STUDIJA:** dvosemestralni (60 sati)

**NAZIV KOLEGIJA:** Randomizirani algoritmi u numeričkoj linearnoj algebri i strojnom učenju

<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>
<b>predavanja</b>	<b>2</b>	Zvonimir Bujanović Hrvoje Planinić
<b>vježbe</b>		
<b>seminar</b>		
<b>ECTS BODOVI:</b>		
<b>CILJ KOLEGIJA:</b>		
Algoritmi s elementima slučajnosti ( <i>randomizirani algoritmi</i> ) su imali relativno marginalnu		

ulogu u numeričkoj linearnoj algebri sve do posljednjih nekoliko godina. Njihova prvenstvena uloga bila je, primjerice, samo kod inicijalizacije drugih, sofisticiranijih metoda, ili pak u Monte Carlo metodama za približno računanje integrala. No u zadnje vrijeme, ova situacija se drastično promijenila, prvenstveno zahvaljujući razvoju randomiziranih algoritama za određivanje aproksimacija niskog ranga, poput randomiziranog SVD ili CUR algoritma te algoritama za rješavanje problema najmanjih kvadrata i estimaciju traga. Detaljna vjerojatnosna analiza ovih algoritama dala je garanciju visoke točnosti dobivenih rezultata sličnu klasičnim metodama, a uz mnogo bolje performanse.

Paralelno s napretkom u numeričkoj analizi, veliki entuzijazam oko randomiziranih algoritama pojavio se i u srodnim područjima. Tako je stohastički gradijentni spust (i njegove varijante) postao standardni algoritam za rješavanje složenih optimizacijskih problema u strojnom učenju. Jedan od najvažnijih primjera je treniranje neuronskih mreža s velikim brojem parametara, gdje korištenje varijanti stohastičkog gradijentnog spusta (bez dodavanja regularizacije) pomalo iznenađujuće rezultira modelima koji nemaju problema s *overfittingom*.

Cilj ovog kolegija je dati pregled suvremenih randomiziranih algoritama numeričke linearne algebre i strojnog učenja. Razvit ćemo vjerojatnosne alate i tehnike potrebne za njihovu analizu, te izvesti teorijska svojstva izračunatih rezultata. Bit će razmotreni i aktualni trendovi istraživanja i otvorena pitanja u ovom području.

#### **NASTAVNI SADRŽAJI:**

1. Osnovni rezultati o glavnim vjerojatnosnim distribucijama. Koncentracijske nejednakosti. Primjene na matrične funkcije.
2. Estimacija traga matrice i pripadne ocjene.
3. Problem svojstvenih vrijednosti iz vjerojatnosne perspektive. Randomizirana metoda potencija; randomizirane metode aproksimacija iz Krylovljevih potprostora.
4. Slučajna linearna ulaganja. Randomizirani SVD i druge metode za aproksimaciju niskog



ranga. Primjena na problem najmanjih kvadrata.

5. Analiza gradijentnog i stohastičkog gradijentnog spusta -- neasimptotske donje i gornje ograde na brzinu konvergencije u ovisnosti o broju iteracija, te o svojstvima funkcije cilja (glatkoća i konveksnost. Primjena na optimizacijske probleme u strojnom učenju.

6. Varijante stohastičkog gradijentnog spusta poput Adagrad, Adam, SAGA itd.

7. Preparametrizirani (engl. *overparametrised*) modeli u strojnom učenju (poput dubokih neuronskih mreža) i fenomen dvostrukog silaska (engl. *double descent*).

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:**

Izrada do najviše četiri domaće zadaće.

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:**

Predane i pozitivno ocijenjene domaće zadaće.

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:**

Seminari i/ili domaće zadaće.

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNAJJE:**

Elementi numeričke linearne algebre (matrične faktorizacije) i numeričke analize, te osnovno poznavanje vjerojatnosti i statistike – sve na razini odgovarajućih kolegija (pred)diplomskog studija matematike. Programiranje u nekom programskom jeziku.

**OBAVEZNA LITERATURA:**

P. G. Martinsson, J. Tropp: *Randomized numerical linear algebra: Foundations and algorithms*, Cambridge University Press, 2020.

R. Vershynin: *High-Dimensional Probability - An Introduction with Applications in Data Science*, Cambridge University Press, 2018.

J. Tropp: *ACM 204 - Randomized Algorithms for Matrix Computations*, <https://doi.org/10.7907/nwsv-df59>, Caltech, 2021.

F. Bach: *Learning theory from first principles*. MIT press, 2023. (draft verzija dostupna na [https://www.di.ens.fr/~fbach/ltfp\\_book.pdf](https://www.di.ens.fr/~fbach/ltfp_book.pdf))

S. J. Wright, B. Recht: *Optimization for data analysis*. Cambridge University Press. 2022.

**DOPUNSKA LITERATURA:**

Murray, Demmel et al.: Randomized Numerical Linear Algebra - A Perspective on the Field With an Eye to Software, <https://arxiv.org/abs/2302.11474>, 2023.

D. Woodruff: Sketching as a Tool for Numerical Linear Algebra, *Foundations and Trends in Theoretical Computer Science*, Vol. 10, No. 1-2, pp 1-157, 2014.

Bartlett, P. L., Long, P. M., Lugosi, G., & Tsigler, A.: Benign overfitting in linear

regression. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(48), 30063-30070., 2020.

**NAZIV STUDIJA: ZDRUŽENI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE**

**SEMESTAR STUDIJA: ljetni (30 sati)**

**NAZIV KOLEGIJA: Podacima pogonjena numerička analiza nelinearne dinamike**

**OBLIK NASTAVE**

**SATI TJEDNO**

**IZVOĐAČ NASTAVE**

<b>predavanja</b>	<b>2</b>	Zlatko Drmač
<b>konzultacije</b>	<b>2</b>	Zlatko Drmač
<b>seminar</b>	<b>2</b>	Zlatko Drmač
<b>ECTS BODOVI:</b>		
<b>CILJ KOLEGIJA:</b>		
<p>Dynamic Mode Decomposition (DMD) je popularna numerička metoda za podacima pogonjenu (baziranu na podacima, <i>data driven</i>) analizu dinamičkih sustava, sa sve većim brojem područja primjene. Može se koristiti za redukciju dimenzije modela, analizu skrivene structure u kompleksnoj dinamici te za predviđanja i kontrolu. Originalno je uvedena za primjene u računalnoj dinamici fluida. Teorijska podloga za DMD i općenitiju Extended DMD (EDMD) je Koopmanov operator kompozicije. Time je EDMD zapravo numerička realizacija analize dinamičkih sustava pomoću Koopmanovog operatora. Izvrsne performance metode su motivirale razvoj nekoliko modifikacija zahvaljujući kojima je EDMD postala atraktivna metoda za analizu, redukciju dimenzije, te numeričku identifikaciju nelinearnih dinamičkih sustava, baziranu na</p>		

podacima.

Cilj kolegija je prezentirati *state of the art* numeričke metode za numeričku analizu nelinearne dinamike, baziranu na podacima i u teorijskom okviru Koopmanovog operatora. Zahtijevat će se aktivno sudjelovanje. Uz redovna predavanja, materijal će biti obrađivan kroz dodatno samostalno proučavanje literature i izradu praktičnih softverskih projekata.

#### NASTAVNI SADRŽAJI:

##### Uvod

1. Motivacijski primjeri i problemi
2. Koopmanov operator
3. Podacima pogonjen/baziran na podacima (data driven) okvir
4. Podacima pogonjena kompresija operatora
5. Koopmanova modalna dekompozicija

## Konačnodimenzionalna aproksimacija: DMD i EDMD

1. SVD, aproksimacije malog ranga i problem najmanjih kvadrata
2. Schmidov DMD algoritam
3. Detaljna analiza: Rayleigh-Ritzova ekstrakcija
4. Podacima pogonjeni reziduali i profinjenje modova
5. Extended DMD algoritam
6. Jezgre i jezgri trik

Rekonstrukcija/analiza podataka i predviđanje

1. Modalna dekompozicija
2. Strukturirani težinski problem najmanjih kvadrata
3. Normalne jednačbe i Khatri-Raoov produkt

#### Fizikom informirani EDMD

1. Hermitski EDMD
2. EDMD koji čuva mjeru

#### Podacima pogonjena identifikacija nelinearne dinamike

1. SINDy – Sparse Identification of Nonlinear Dynamics



2. Identifikacija učenjem generatora polugrupe Koopmanovih operatora

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:** Pohađanje predavanja, izrada domaćih zadaća, izrada računalnih projekata.

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** Uspješno izvršene sve obaveze.

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** Pismena obrada individualne seminarske teme, te nakon odobrenja nastavnika izlaganje iste na seminaru.

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNAJJE:** Numerička matematika (numerička linearna algebra, numeričko rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednažbi), analiza (teorija mjere,  $L_p$  prostori), osnove teorije operatora i programiranje (Matlab ili Python).

**OBAVEZNA LITERATURA**

1. H. Arbabi, I. Mezić. Ergodic theory, dynamic mode decomposition, and computation of spectral properties of the Koopman operator.

SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 16(4), 2096-2126, 2017.

2. S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems, PNAS, vol. 113, no. 1, April 12, 2016, pp. 3932-3937.
3. J. N. Kutz and S. L. Brunton and B. W. Brunton and J. L. Proctor: Dynamic Mode Decomposition, Society for Industrial and Applied Mathematics 2016.
4. A. Mauroy, J. Goncalves. Koopman-based lifting techniques for nonlinear systems identification, IEEE Transactions on **Automatic Control** 65 (6) 2020, 2550-2565.
5. P. J. Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. Journal of Fluid Mechanics 656, 5-28, 2010.
6. P. J. Schmid P. J. Data-driven and operator-based tools for the analysis of turbulent flows. Advanced Approaches in Turbulence, Durbin Paul (Ed.). Elsevier, 243-305. 2021.
7. J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton, and J. N. Kutz. On dynamic mode decomposition: Theory and applications. Journal of Computational Dynamics 1, 2 (2014), 391-421.

8. M. O. Williams, I. G. Kevrekidis and C. W. Rowley. A data-driven approximation of the Koopman operator: Extending dynamic mode decomposition. *Journal of Nonlinear Science* 25, 6 (2015), 1307-1346.

**DOPUNSKA LITERATURA:**

1. P. J. Baddoo, B. Herrmann, B. J. McKeon, J. N. Kutz, and S. L. Brunton. Physics-informed dynamic mode decomposition (piDMD). arXiv:2112.04307.
2. M. Colbrook. The mpEDMD Algorithm for Data-Driven Computations of Measure-Preserving Dynamical Systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis* Vol. 61, Iss. 3 (2023).
3. M. Colbrook. The Multiverse of Dynamic Mode Decomposition Algorithms. arXiv:2312.00137v2
4. Z. Drmač, I. Mezić, and R. Mohr. Data driven modal decompositions: analysis and enhancements. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 40(4):A2253--A2285, 2018.
5. Z. Drmač, I. Mezić, and R. Mohr. Data driven Koopman spectral analysis in Vandermonde-Cauchy form via the DFT: numerical

method and theoretical insights. *SIAM Journal on Scientific Computing*}, 41(5): A3118-A3151, 2019.

6. Z. Drmač, I. Mezić, and R. Mohr, On least squares problem with certain Vandermonde-Khatri-Rao structure with **applications to DMD**. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(5), A3250--A3284., 2020.
7. Z. Drmač, A LAPACK implementation of the Dynamic Mode Decomposition I., LAPACK Working Note 298, 2022. (*ACM Transactions on Mathematical Software* Volume 50 Issue 1 Article No.: 1 pp 1-32, 2024.)
8. Z. Drmač, A LAPACK implementation of the Dynamic Mode Decomposition II., LAPACK Working Note 300, 2022. (*Hermitian Dynamic Mode Decomposition - Numerical Analysis and Software Solution*, *ACM Transactions on Mathematical Software* Volume 50 Issue 1 Article No.: 2 pp 1-23, 2024.)
9. Z. Drmač, I. Mezić, and R. Mohr. Koopman lifting and identification using finite dimensional approximations of the infinitesimal generator - a numerical implementation of the Mauroy-Goncalves method. *Mathematics* 2021, 9(17), 2075.
10. M. R. Jovanović, P. J. Schmid and J. W. Nichols. Sparsity-promoting dynamic mode decomposition. *Physics of Fluids* 26, 2 (Feb. 2014), 024103.

<b>NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE</b>		
<b>SEMESTAR STUDIJA:</b> jednosemestralni (30 sati)		
<b>NAZIV KOLEGIJA:</b> Vjerojatnosna kombinatorika		
<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>

<b>predavanja</b>	<b>2</b>	Nina Kamčev
<b>vježbe</b>		
<b>seminar</b>		
<b>ECTS BODOVI:</b>		
<b>CILJ KOLEGIJA:</b>		
<p>Cilj ovog kolegija iz vjerojatnosne kombinatorike je pružiti studentima temelje naprednih vjerojatnosnih metoda prilagođenih diskretnim problemima. Naglasak je na primijeni ključnih metoda poput metoda prvog i drugog momenta, koncentracije martingala te Lovászove lokalne leme i njenih algoritamskih varijanti. Osim toga, obrađivat će se značajni nedavni rezultati u teoriji slučajnih grafove, poput dokaza i primjena Kahn-Kalaieve hipoteze.</p>		

**NASTAVNI SADRŽAJI:**

- Metode prvog i drugog momenta
- Lovászova lokalna lema (LLL) i algoritamske varijante
- Primjene martingala, slučajnih procesa i koncentracijskih nejednakosti
- Slučajni grafovi
- Kahn-Kalaieva hipoteza
- Pregled primjena i rezultata u Ramseyevoj teoriji, aditivnoj kombinatorici i teorijskom računarstvu

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:** *Pohađanje predavanja, izrada domaćih zadaća i seminara.*

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** Prisustvo na barem 60% predavanja.

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** Seminari i / ili domaće zadaće.

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE:** Osnovna vjerojatnost i kombinatorika, asimptotska notacija.

Studenti slobodno mogu upisati ovaj kolegij zajedno s kolegijem Randomizirani algoritmi, ili samo jedan od njih– kolegiji će eventualno koristiti

srodne metoda, a obrađivati različite teme.

**OBAVEZNA LITERATURA:**

1. Alon, Noga, and Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. John Wiley & Sons, 2016.
2. Zhao, Yufei, *Probabilistic method in Combinatorics*. <https://yufeizhao.com/pm/>
3. Motwani, Rajeev, and Prabhakar Raghavan. *Randomized algorithms*. Cambridge university press, 1995.

**DOPUNSKA LITERATURA:**

1. Perkins, Will. "Searching for (sharp) thresholds in random structures: where are we now?." *arXiv preprint arXiv:2401.01800* (2024).



<b>NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE</b>		
<b>SEMESTAR STUDIJA: 1. i 2.</b>		
<b>NAZIV KOLEGIJA: Primjena teorije presjeka u enumerativnoj geometriji</b>		
<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>
predavanja	2	Matija Kazalicki
vježbe	0	
seminar	0	

**ECTS BODOVI:**

**CILJ KOLEGIJA:** Cilj kolegija je upoznati studente s teorijom presjeka u algebarskoj geometriji (kratak uvod u sheme, Chowov prsten) te im pokazati kako se ona koristi u enumerativnoj geometriji. Npr. može se tako pokazati da generički postoji 3264 konike koje su tangencijalne na pet danih konika.

**NASTAVNI SADRŽAJI:** Sheme – definicija i osnovna svojstva. Osnovne ideje teorije presjeka – Chowov prsten projektivnih prostora. Parametarski prostori singularnih kubičnih krivulja i odgovarajući enumerativni problem. Grasmanijani i enumerativni problemi s pravcima. Chernove klase i primjene.

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:** nema

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** nema

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** Seminar

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Osnovno poznavanje algebarske geometrije (na razini diplomskih kolegija)**

**LITERATURA:**

D. Eisenbud, J. Harris: 3264 & All That

**DOPUNSKA LITERATURA:**

D. Eisenbud, J. Harris: The Geometry of Schemes

W. Fulton: Introduction to intersection theory in algebraic geometry

<b>NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE</b>		
<b>SEMESTAR STUDIJA:</b> zimski i ljetni (60 sati)		
<b>NAZIV KOLEGIJA: Verteks-algebarske metode u teoriji reprezentacija</b>		
<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>
predavanja	2	Slaven Kožić
vježbe		
seminar		

**ECTS BODOVI:**

**CILJ KOLEGIJA:** Cilj kolegija je dati pregled modernih verteks-algebarskih metoda u teoriji reprezentacija određenih beskonačnodimezionalnih Liejevih algebri i kvantnih afinih algebri. Kolegij se sastoji od tri dijela. U prvom dijelu, koji služi kao motivacija, bit će dan uvod u teoriju afinih Kac-Moodyjevih Liejevih algebri i njihovih reprezentacija. Drugi dio kolegija posvećen je teoriji verteks-algebri. Poseban naglasak bit će dan na verteks-algebrama pridruženim beskonačnodimezionalnim Liejevim algebrama, kao što su afine Liejeve algebre. U trećem dijelu kolegija dat ćemo uvod u kvantne afine algebre, određenu klasu kvantnih grupa pridruženih trigonometrijskim R-matricama. Na kraju ćemo razviti pripadnu teoriju  $\varphi$ -koordinatnih modula za kvantne verteks-algebre.

**NASTAVNI SADRŽAJI:**

1. Afine Liejeve algebre
2. Reprezentacije afinih Liejevih algebri

3. Uvod u teoriju verteks-algebri

4. Verteks-algebre pridružene beskonačnodimenzionalnim Liejevim algebrama

5. Uvod u teoriju kvantnih afinih algebri i njihovu teoriju reprezentacija

6.  $\varphi$ -koordinatni moduli za kvantne verteks-algebre

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:**

Pohađanje predavanja, izrada i predaja domaćih zadaća, održavanje seminara.

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** Pohađanje predavanja.

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** Predane i pozitivno ocijenjene domaće zadaće, održan i pozitivno ocijenjen seminar.

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNAJJE:** Dovoljno je osnovno predznanje iz linearne algebre i vektorskih prostora. Korisno je, ali ne i nužno, osnovno predznanje o algebarskim strukturama.

**OBAVEZNA LITERATURA:**

1. J. Lepowsky, H.-S. Li, Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 2003.
2. H.-S. Li,  $\varphi$ -Coordinated Quasi-Modules for Quantum Vertex Algebras, Communications in Mathematical Physics 308 (2011), 703–741.
3. J. Hong, S.-J. Kang, Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases, American Mathematical Society, 2002.
4. V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, 1990.

**DOPUNSKA LITERATURA:**

1. R. Carter, Lie Algebras of Finite and Affine Type, Cambridge University Press, 2005.
2. I. B. Frenkel, N. Jing, Vertex representations of quantum affine algebras, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 85 (1988), 9373-9377.

3. J. C. Jantzen, Lectures on Quantum Groups, American Mathematical Society, 1996.

4. V. Kac, Vertex algebras for beginners, University Lecture Series, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

**NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE**

**SEMESTAR STUDIJA:** zimski i ljetni



<b>NAZIV KOLEGIJA:</b> Homogenizacija i topološka optimizacija		
<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>
predavanja	2	Matko Ljulj i Boris Muha
vježbe	0	
seminar	0	
<b>ECTS BODOVI:</b>		
<b>CILJ KOLEGIJA:</b> Cilj kolegija je dati pregled klasične teorije homogenizacije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s glavnim primjenama u		

lineariziranoj elastičnosti. Nakon toga obradit ćemo teme topološke optimizacije, uključujući i homogenizacijsku metodu.

**NASTAVNI SADRŽAJI:**

- Uvod.
- Homogenizacija u parcijalnim diferencijalnim jednačinama, dvoskalna konvergencija. Primjena u elastičnosti.
- Parametarska optimizacija u parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Gradijentna metoda. Numerički algoritam.
- Topološka optimizacija homogenizacijskom metodom. SIMP metoda. Numerički algoritam.

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVANJA:** pohađanje predavanja, držanje barem jednog seminara u trajanju od najmanje 45 minuta

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** prisustvo na barem 80% predavanja

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** seminari

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNAJJE:** Kolegij će biti u suštini samodostatan, ali je poželjno osnovno predznanje iz parcijalnih diferencijalnih jednažbi i funkcionalne analize.

**LITERATURA:**

G. Allaire, L. Cavallina, N. Miyake, T. Oka, T. Yachimura: *The homogenization method for topology optimization of structures: old and new*, 2019, arXiv:1901.09336.

G. Allaire, *Shape Optimization by the Homogenization Method*, Springer New York, NY, 2002.

**DOPUNSKA LITERATURA:**

C. Dapogny, *An introduction to shape and topology optimization*. Doctoral. France. 2018, <https://hal.science/cel-01923097v1>



**NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE**

<b>SEMESTAR STUDIJA:</b> jednosemestralni (30 sati)		
<b>NAZIV KOLEGIJA:</b> Slučajne šetnje i pakiranje kružnicama		
<b>OBLIK NASTAVE</b>	<b>SATI TJEDNO</b>	<b>IZVOĐAČ NASTAVE</b>
predavanja	2	Rudi Mrazović
vježbe		
seminar		
<b>ECTS BODOVI:</b>		

**CILJ KOLEGIJA:**

Pretpostavimo da u ravnini imamo neko pakiranje kružnicama, odnosno kolekciju kružnica koji imaju disjunktne unutrašnjosti. Iz tog pakiranja konstruirajmo planarni graf na način da svakoj kružnici pridružimo vrh kojeg nacrtamo u njenom središtu, te bridovima spojimo one vrhove čije se kružnice dodiruju. Na taj način dobivamo neki planarni graf. Obratno, pokazuje se da svaki planaran graf možemo realizirati na prethodno opisani način pomoću pakiranja kružnicama. Cilj kolegija je pokazati vezu između vjerojatnosnih svojstava grafa (preciznije, povratnosti slučajne šetnje na njemu) i pripadnog pakiranja kružnicama. Nadalje, ako bude dovoljno vremena pokazat će se i veza pakiranja kružnica i diskretnih holomorfnih preslikavanja.

**NASTAVNI SADRŽAJI:**

slučajne šetnje i električne mreže, teorem o pakiranju kružnicama, parabolička i hiperbolička pakiranja, planarni lokalni limesi

grafova, povratnost slučajnih planarnih mapiranja, uniformna razapinjuća stabla planarnih grafova

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVANJA:** Pohađanje predavanja, izrada domaćih zadaća i seminara.

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** Prisustvo na barem 60% predavanja.

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** seminari

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNAJJE:** teorija vjerojatnosti, kompleksna analiza

**OBAVEZNA LITERATURA:**

1. Steffen Rohde. *Oded Schramm: from circle packing to SLE*. Annals of Probability, 39(5):1621–1667, 2011
2. Asaf Nachmias. *Planar Maps, Random Walks and Circle Packings*. Springer (2020)

3. Kenneth Stephenson. *Introduction to circle packing*. Cambridge University Press (2005)

**DOPUNSKA LITERATURA:**

**NAZIV STUDIJA:** ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

**SEMESTAR STUDIJA:** dvosemestralni (60 sati)

**NAZIV KOLEGIJA:** Opća teorija linearnih prigušenih sustava I i II

**OBLIK NASTAVE**

**SATI TJEDNO**

**IZVOĐAČ NASTAVE**



<b>predavanja</b>	<b>2</b>	<p>Prof dr. sc. <b>Krešimir Veselić</b>;  Fernuniversitat Hagen,  Fakultat für Mathematik und Informatik  Hagen, Njemačka</p> <p>Prof. dr. sc. <b>Ninoslav Truhar</b>,  Fakultet primijenjene matematike i informatike  Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  Osijek, Hrvatska</p>
<b>vježbe</b>	<b>0</b>	
<b>seminar</b>	<b>0</b>	
<b>ECTS BODOVI: upisuje administracija studija</b>		
<p><b>CILJ KOLEGIJA:</b></p> <p>Ovaj predmet obuhvaća teme iz područja teorije upravljanja linearnim vibracijskim sustavima, s naglaskom na optimizaciju i njihovu dinamiku.</p> <p>Na temelju fizikalnih modela izgradit će se teorija linearnih prigušenih sustava. Uglavnom ćemo se usredotočiti na konačnodimenzionalne sustave,</p>		

iako će biti napravljena i neka poopćenja. Glavni je cilj pripremiti se za probleme optimizacije takvih sustava što će se raditi u drugom dijelu.

Drugi dio je posvećen proučavanju numeričkih svojstava linearnih dinamički sustava uz ilustracije na jednostavnim mehaničkim modelima. U tu svrhu će biti proučavane direktne i iterativne metode za rješavanje Sylvesterova i Lyapunovljevih jednažbi. Dalje, istražuje se optimizacija prigušenja s naglaskom na kriterije optimizacije te metode optimizacije prigušenja ranga 1 i višeg ranga, uključujući direktne i iterativne metode. Kroz primjere i prezentaciju algoritama u programskim jezicima poput Octavea i Matlab, ilustrirat će se i demonstrirati koncepti i metode koje su obrađene u teorijskom dijelu.

#### NASTAVNI SADRŽAJI:

##### Dio I:

1. Model
2. Istovremena dijagonalizacija (Modalno prigušenje)
3. Fazni prostor
4. Prostori sa indefinitnim skalnim umnoškom spaces i pripadni operatori
5. Kose i J-ortogonalne projekcije
6. Spektralna svojstva i redukcija J-Hermitskih matrica

7. Definitni spektri
8. Spektralna dekompozicija opće J-Hermitove matrice
9. Matrična eksponencijalna funkcija (polugrupa)
10. Kvadratni problem svojstvene vrijednosti
11. Pasivno upravljanje, općenite činjenice o optimizaciji po Ljapunovu

Dio II:

1. Uvod i motivacija
2. Linearni dinamički sustavi
  - 2.1. Model masa povezanih oprugama
  - 2.2 Model žice i štapa
3. Sylvesterova i Lyapunova jednačnja
  - 3.1. Direktne metode
  - 3.2. Iterativne metode
4. Optimizacija prigušenja

4.1. Optimizacijski krteriji

4.2. Optimizacija prigušenja ranga 1

4.2.1. Optimizacija viskoznosti

4.2.2. Optimizacija pozicija

5. Optimizacija prigušenja višeg ranga

5.1. Direktne metode (Netwon)

5.2. Iterativne metode

6. Primjeri i prezentacija algoritama (Octave, Matlab)

**OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:**

Dio predavanja (po potrebi) će se odvijati online.

Obaveze studenata: student su obavezni izraditi barem jedan seminar u dogovoru sa predavačem te ga javno prezentirati.

**UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT:** prije izlaska na usmeni dio ispita student mora održati barem jedan seminar.

**NAČIN POLAGANJA ISPITA:** isit se polaže usmeno.

**PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE:** Pretpostavlja se da student dobro vlada osnovnim pojmovima numeričke matematike (numeričke linearne algenbe i numeričke analize).

**OBAVEZNA LITERATURA:**

1. I. Aganović, K. Veselić, Matematičke metode i modeli (Croatian), Sveučilište Josipa Jurja; Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, 2014
2. K. Veselić, Linear Oscillations of Damped Systems Springer 2011, <https://www.fernuni-hagen.de/MATHPHYS/veselic/pslist.html>
3. K. Veselić, Bounds for contractive semigroups and second order systems, Operator Theory: Advances and Applications, 162, (2005) 293-308 at <https://www.fernuni-hagen.de/MATHPHYS/veselic/pslist.html>
4. A. C. Antoulas, Approximation of Large-Scale Dynamical Systems, SIAM, Philadelphia, 2005.
5. B. N. Datta, " Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis" , Elsevier Academic Press, 2003.
6. G. H. Golub, C. F. Van Loan, Matrix Computations, 3rd ed. The Johns Hopkins University Press, 1996, Baltimor.
7. G.W. Stewart, J. G. Sun, Matrix perturbation theory. Academic Press, 1990.

**DOPUNSKA LITERATURA:**

1. T. Kato, Perturbation Theory for linear Operators, Springer 1966  
[https://books.google.de/books?hl=en&lr=&id=k-7nCAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq=tosio+kato&ots=w8HFuhjaBD&sig=ggxePydewZKNb7mJGynTT-rBeFM&redir\\_esc=y#v=onepage&q=tosio%20kato&f=false](https://books.google.de/books?hl=en&lr=&id=k-7nCAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq=tosio+kato&ots=w8HFuhjaBD&sig=ggxePydewZKNb7mJGynTT-rBeFM&redir_esc=y#v=onepage&q=tosio%20kato&f=false)
2. Ivica Nakić: Optimal Damping of vibrational systems, PH Disertation Frenuniversität in Hagen 2003

<https://www.fernuni-hagen.de/MATHPHYS/veselic/doktorandi.html>

3. K. Veselić. On linear vibrational systems with one dimensional damping. Appl Anal, 29:1–18, 1988.
4. K. Veselić. On linear vibrational systems with one dimensional damping II. Integral Eq. Operator Th., 13:883–897, 1990.
5. Ph.D thesis: Jing-Rebecca Li, <http://www-rocq.inria.fr/~jli/thesis.ps>
6. N. Truhar and K. Veselić, Bounds on the trace of a solution to the Lyapunov equation with a general stable matrix, Systems & Control Letters, 56 (2007) , 7-8; 493-503  
[http://www.mathos.hr/~ntruhar/Index/revised\\_decayADI\\_pub.pdf](http://www.mathos.hr/~ntruhar/Index/revised_decayADI_pub.pdf)
7. N. Truhar and K. Veselić. On some properties of the Lyapunov equation for damped systems. Math. Commun., 9:189–197, 2004.
8. N. Truhar and K. Veselić, An efficient method for estimating the optimal dampers' viscosity for linear vibrating systems using Lyapunov equation. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 31(1):18–39, 2009.
9. D. C. Sorensen and Y. Zhou, Bounds on eigenvalue decay rates and sensitivity of solutions to Lyapunov equations. (Technical Report)  
[http://www.caam.rice.edu/tech\\_reports/2002/TR02-07.pdf](http://www.caam.rice.edu/tech_reports/2002/TR02-07.pdf)

**STUDY PROGRAM: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE**

**SEMESTER:** Winter and Summer

<b>COURSE TITLE: The Cauchy problem in general theory of relativity</b>		
<b>CLASSES TYPE</b>	<b>hours (weekly)</b>	<b>LECTURER</b>
lectures	2	Nenad Antić
exercises	0	
seminar	0	
<b>ECTS POINTS:</b>		
<p><b>AIMS OF THE PROPOSED COURSE:</b> In 1915 Albert Einstein wrote down the field equations for the general relativity, and in justification of the claim that gravitation waves propagate at the speed of light, he used a system of wave equations. In the following several decades many top mathematicians, including Hilbert and Lanczos, tried to provide more solid mathematical foundation for Einsteins ideas, without definite success. Only in 1952 Yvonne Fourès-Bruhat (later Choquet-Bruhat) showed that the Einstein</p>		

equations can be written as a Cauchy problem, and provided the proof of local existence and uniqueness. Of course, that was only the first step, as these results should be extended to global validity, and the stability proven.

The goal of this course is to introduce students to the basics of mathematical formulation of the general theory of relativity, as well as expressing the fundamental field equations as a Cauchy problem, at the same time connecting the fundamentals of physical theory with the Lorenz differential geometry and modern theory of (non)linear hyperbolic equations.

**SYLLABUS:**

- Fundamental postulates of special theory of relativity, Lorenz transformations, relativistic mechanics
- The formalism of tensor calculus
- Fundamental postulates of general theory of relativity, the field equations
- General relativity inferred from the variational principle, energy-momentum tensor, the Maxwell equations
- Manifolds and the Lorenz geometry
- Characterisation of global hyperbolicity, the uniqueness of solution to the linear wave equation
- Necessary conditions on initial data in general relativity
- Local existence of solutions to the Cauchy problem
- Cauchy stability and existence of the global hyperbolic expansion

**STUDENTS' OBLIGATIONS:** turning in the homework assignments, presenting the seminar(s), class attendance.



**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:** 50% of homework assignments, at least one seminar presented, classes attended.

**FINAL EXAM:** successful presentation of an advanced seminar at one of official seminars of the doctoral study

**PREREQUISITES:** Basic knowledge of differential geometry and partial differential equations is desirable. However, the course should be essentially self-contained, not requiring previous knowledge of general theory of relativity. Depending on the preparation of students, basic mathematical preparation would be supplemented (differential geometry and partial differential equations).

**LITERATURE:**

Hans Ringström: The Cauchy problem in general relativity, EMS Publishing House, 2009.

Ray d'Inverno, James Vickers: Introducing Einstein's relativity - A deeper understanding, 2nd ed, Oxford University Press, 2022.

Yvonne Choquet-Bruhat, Cecile DeWitt-Morette, Margaret Dillard-Bleick: Analysis, manifolds and physics, Part 1: Basics (Revised edition), North-Holland, 1982.

**SUPPLEMENTARY LITERATURE:**

Piotr T. Chruściel: Elements of general relativity, Birkhäuser, 2019.

Yvonne Choquet-Bruhat: General relativity and Einstein's equations, Oxford University Press, 2009.

Demetrios Christodoulou: Mathematical problems of general relativity I, EMS Publishing House, 2008.

Christian Bär, Nicolas Ginoux, Frank Pfäffle: Wave equations on Lorentzian manifolds and quantization, EMS Publishing House, 2007.

Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden, Tudor Ratiu: Manifolds, tensor analysis, and applications, Springer, 2007.

Michael Grosser, Michael Kunzinger, Michael Oberguggenberger, Roland Steinbauer: Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity, Kluwer, 2001.

Stephen Hawking, George F. R. Ellis: The large scale structure of space-time, Cambridge University Press, 1973.

Charles W. Misner, Kip Thorne, John Archibald Wheeler: Gravitation, Freeman, 1973. (reprint: Princeton University Press, 2017.)

<b>STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics</b>		
<b>SEMESTER:</b> Winter (30 hours)		
<b>COURSE TITLE: Homotopy theory of operads</b>		
<b>CLASSES TYPE</b>	<b>#hours (weekly)</b>	<b>Professor/Lecturer</b>
lectures	2	Matija Bašić
consultations	2	Matija Bašić

seminar	2	Matija Bašić
<b>ECTS POINTS: to be filled in by the admin stuff</b>		
<p><b>AIM OF THE COURSE:</b> The aim of the course is to enable students to become familiar with abstract homotopy theory given by the formalism of model categories typically encountered in homological algebra and algebraic topology. The focus of study are (topological) operads as objects that are central to loop space theory in algebraic topology, different types of algebras, mathematical physics (deformation theory) and differential topology. In the course we will cover different models of operads and infinity-operads from both topological and algebraic perspective.</p>		
<p><b>SYLLABUS:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Algebraic perspective on operads as generalizations of categories.</li> <li>• Little cubes operad and little discs operads. Additivity theorem. Applications to iterated loop spaces and configuration spaces.</li> <li>• Introduction to model categories. Model structures on topological spaces, simplicial sets and chain complexes.</li> <li>• Models for infinity-operads. Dendroidal sets.</li> </ul>		
<p><b>STUDENTS' OBLIGATIONS:</b></p> <p>Students will read a number of recent papers in which these theories and methods are introduced and exemplified, work with exercises related to the</p>		

papers, and at the end of the course produce a smaller theoretical study of a mathematical topic based on the course material and further relevant literature. They will take part in activities during the course and expose their productions in the form of (at least one) seminar.

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:**

**FINAL EXAM:** Exposition in the form of (at least one) seminar.

**PREREQUISITES: --**

**LITERATURE:**

17. E. R. Fadell, S. Y. Husseini (2001) *The Geometry and Topology of Configuration Spaces*, Springer.
18. P. Goerss, J. Jardine (1999) *Simplicial Homotopy Theory*, Springer Basel.
19. G. Heuts, I. Moerdijk (2022) *Simplicial and Dendroidal Homotopy Theory*, Springer.
20. M. Hovey (1999) *Model Categories*, AMS.
21. J.-L. Loday, B. Vallette (2012) *Algebraic Operads*, online book.  
[https://pure.mpg.de/rest/items/item\\_3121746\\_1/component/file\\_3121747/content](https://pure.mpg.de/rest/items/item_3121746_1/component/file_3121747/content)
22. P. May (1972) *The Geometry of Iterated Loop spaces*, Springer.

**SUPPLEMENTARY LITERATURE:**

18. P. Boavida, M. Weiss (2018) *Spaces of smooth embeddings and configuration categories*, Journal of Topology, Vol. 11, Issue 1.
19. F. Callegaro, et al. (2016) *Configuration Spaces – Geometry, Topology and Representation Theory*, Springer.
20. T. Dyckerhoff, M. Kapranov (2019) *Higher Segal Spaces*, Springer.
21. G. Friedman, *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*, ArXiv: 0809.4221.
22. B. Fresse (2009) *Modules over Operads and Functors*, Springer.
23. T. Willwacher (2015) *M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck-Teichmüller Lie algebra*, Inventiones mathematicae, Vol. 200.

**STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics****SEMESTER:** Winter (30 hours)

<b>COURSE TITLE: Research frameworks in mathematics education</b>		
<b>CLASSES TYPE</b>	<b>#hours (weekly)</b>	<b>Professor/Lecturer</b>
<b>lectures</b>	<b>2</b>	Matija Bašić, Željka Milin Šipuš
<b>consultations</b>	<b>2</b>	Matija Bašić, Željka Milin Šipuš
<b>seminar</b>	<b>2</b>	Matija Bašić, Željka Milin Šipuš
<b>ECTS POINTS: to be filled in by the admin stuff</b>		
<b>AIM OF THE COURSE:</b> The aim of the course to enable students to become familiar with selected relevant theoretical frameworks and methods of research in mathematics education. Theoretical frameworks will include basic ideas of psychological approaches in mathematics education (Piaget),		

and subsequent theories such as Freudenthal's Realistic mathematics education, Tall's Advanced mathematical thinking, Brousseau's Theory of didactic situations, and Chevallard's Anthropological theory of the didactic.

**SYLLABUS:**

- Short history of research in mathematics education. Organization ICMI. Felix Klein as a researcher in mathematics education
- Theoretical frameworks: Freudenthal's Realistic mathematics education, Tall's Advanced mathematical thinking, Brousseau's Theory of didactic situations, and Chevallard's Anthropological theory of the didactic.
- Methods of research in education. Strategies for data collection, construction of questionnaires, usage of statistical tests, interviewing techniques. Probabilistic models in education: Item Response Theory.
- Selected topics in teaching and learning of algebra, calculus, geometry, probability. Concept development (Sfard, Dubinsky).

**STUDENTS' OBLIGATIONS:**

Students will read a number of recent papers in which these theories and methods are introduced and exemplified, work with exercises related to the papers, and at the end of the course produce a smaller theoretical study of a mathematical topic based on the course material and further relevant literature. They will take part in activities during the course and expose their productions in the form of (at least one) seminar.

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:**

**FINAL EXAM:** A written theoretical study of a mathematical topic and its exposition in the form of (at least one) seminar.



**PREREQUISITES: --**

**LITERATURE:**

23. Bikner-Ahsbabs, A. & Prediger, S. (Eds.) (2014) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*, Springer.
24. Bond, T.G., & Fox, C. M. (1991). *Applying the Rasch Model: Fundamental Measurement in the Human Sciences*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ.
25. Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970 – 1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
26. Chevallard, Y. (1981). *The Didactics of Mathematics: Its Problematic and Related Research*. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 2(1), 146–158.
27. Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th ed), Routledge Publishers, (Taylor & Francis group), Oxford, UK.
28. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing, Dordrecht.
29. ICMI Study, book series of International Commission on Mathematical Instruction
30. English, L.D., & Kirshner, D. (2016) *Handbook of International Research in Mathematics*, Routledge.
31. Lerman, S. (Ed.) (2014) *Encyclopedia of Mathematics education*, Springer.
32. Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Springer.

## SUPPLEMENTARY LITERATURE:

24. Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. *Crucial Questions for Contemporary Research in Education*. Notices of the AMS, 46(11), 1377–1385.
25. Boaler J. (2012). From psychological imprisonment to intellectual freedom – the different roles that school mathematics can take in students’ lives, 12th international congress on mathematical education, Seoul, Korea
26. Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: Bikner-Ahsbals, A., & Predinger, S. (Eds.) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*, Springer
27. Bosch, M., Gascón, J. & Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and the ATD. *Educ Stud Math* 95, 39–52.
28. Flavell, J. (1967). *The developmental psychology of Jean Piaget*. New York: D. Van Nostrand Company.
29. Freudenthal, H. (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing, Dordrecht
30. Freudenthal H (1991) *Revisiting mathematics education*. China lectures. Kluwer, Dordrecht
31. Schoenfeld A.H. (2002) *Research methods in (mathematics) education*. In: English, L. (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education*. Erlbaum, Mahwah
32. Sfard, A. (2008) *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press, Cambridge
33. Tall, D., & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ Stud Math* 12:151–169
34. van Hiele, P. M. (2004) *A child’s thought and geometry*. In: Carpenter, T.P., Dossey J.A., & Koehler J.L. (Eds.) *Classics in mathematics education research*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

<b>STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics</b>		
<b>SEMESTER:</b> two-semester (60 hours)		
<b>COURSE TITLE: Randomized algorithms in numerical linear algebra and machine learning</b>		
<b>CLASSES TYPE</b>	<b>hours (weekly)</b>	<b>Professor/Lecturer</b>
<b>lectures</b>	<b>2</b>	Zvonimir Bujanović Hrvoje Planinić
<b>exercises</b>		
<b>seminar</b>		

**ECTS POINTS:****AIMS OF THE PROPOSED COURSE:**

Algorithms with elements of randomness (randomized algorithms) had a relatively marginal role in numerical linear algebra until the last few years. Their primary role was, for example, only in the initialization of other, more sophisticated methods, or in Monte Carlo methods for the approximate calculation of integrals. But lately, this situation has changed drastically, primarily thanks to the development of randomized algorithms for determining low-rank approximations, such as the randomized SVD or CUR algorithm and algorithms for solving least squares problems and trace estimation. A detailed probabilistic analysis of these algorithms gave a guarantee of high accuracy of the obtained results, similar to classical methods, with much better performance.

Parallel to the progress in numerical analysis, great enthusiasm for randomized algorithms has appeared in related fields. Stochastic gradient descent (and its variants) has become a standard algorithm for solving complex optimization problems in machine learning. One of the most important examples is the training of neural networks with a large number of parameters, where using variants of stochastic gradient descent (without adding regularization) somewhat surprisingly results in models that do not have problems with overfitting.

The aim of this course is to provide an overview of modern randomized algorithms of numerical linear algebra and machine learning. We will develop the probabilistic tools and techniques necessary for their analysis, and derive the theoretical properties of the computed results. Current research trends and open questions in this area will also be discussed.

**SYLLABUS:**

1. Basic results on the main probability distributions. Concentration inequalities. Applications to matrix functions.
2. Estimation of the matrix trace and the corresponding probabilistic bounds.
3. The problem of eigenvalues from a probabilistic perspective. Randomized power method; randomized approximation methods from Krylov subspaces.
4. Random linear embeddings. Randomized SVD and other low-rank approximation methods. Application to the least squares problem.
5. Analysis of gradient and stochastic gradient descent -- non-asymptotic lower and upper bounds on the speed of convergence depending on the number of iterations and properties of the objective function (smoothness and convexity). Applications to optimization problems in machine learning.
6. Variants of stochastic gradient descent such as Adagrad, Adam, SAGA, etc.
7. Overparameterized models in machine learning (such as deep neural networks) and the phenomenon of double descent.

**STUDENTS' OBLIGATIONS:**

Up to four homework assignments.

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:**

Submitted and positively evaluated homework assignments.

**FINAL EXAM:**

Seminars and/or homework assignments.

**PREREQUISITE:**

Elements of numerical linear algebra (matrix factorizations) and numerical analysis, as well as basic knowledge of probability and statistics - all at the level of the corresponding courses of the (under)graduate university programmes at Department of Mathematics. Familiarity with programming in any programming language.

**LITERATURE:**

P. G. Martinsson, J. Tropp: *Randomized numerical linear algebra: Foundations and algorithms*, Cambridge University Press, 2020.

R. Vershynin: *High-Dimensional Probability - An Introduction with Applications in Data Science*, Cambridge University Press, 2018.

J. Tropp: *ACM 204 - Randomized Algorithms for Matrix Computations*, <https://doi.org/10.7907/nwsv-df59>, Caltech, 2021.

F. Bach: *Learning theory from first principles*. MIT press, 2023. (draft version available at [https://www.di.ens.fr/~fbach/lftp\\_book.pdf](https://www.di.ens.fr/~fbach/lftp_book.pdf))

S. J. Wright, B. Recht: *Optimization for data analysis*. Cambridge University Press. 2022.

#### **ADDITIONAL LITERATURE:**

Murray, Demmel et al.: *Randomized Numerical Linear Algebra - A Perspective on the Field With an Eye to Software*, <https://arxiv.org/abs/2302.11474>, 2023.

D. Woodruff: *Sketching as a Tool for Numerical Linear Algebra*, *Foundations and Trends in Theoretical Computer Science*, Vol. 10, No. 1-2, pp 1-157, 2014.

Bartlett, P. L., Long, P. M., Lugosi, G., & Tsigler, A.: Benign overfitting in linear regression. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(48), 30063-30070., 2020.

**STUDY PROGRAM: DOKTORAL PROGRAMME IN MATHEMATICS**

**SEMESTER: Spring (30 hours),**

**COURSE TITLE: Data driven computational analysis of nonlinear dynamics**



<b>CLASSES TYPE</b>	<b>#hours (weekly)</b>	<b>Professor/Lecturer</b>
<b>lectures</b>	<b>2</b>	<b>Zlatko Drmač</b>
<b>consultations</b>	<b>2</b>	<b>Zlatko Drmač</b>
<b>seminar</b>	<b>2</b>	<b>Zlatko Drmač</b>
<b>ECTS POINTS:</b>		
<b>GOALS OF THE COURSE:</b>		
<p><b>Dynamic Mode Decomposition (DMD) is a popular computational tool for data driven analysis of dynamical systems, with ever increasing areas of applications. It can be used for model order reduction, analysis of latent structures in the dynamics, and e.g. forecasting and control. It originates from computational fluid dynamics. The theoretical bedrock upon which the more general Extended DMD (EDMD)</b></p>		

framework is built is the Koopman composition operator. Hence, the EDMD can be considered as a computational device in the Koopman analysis framework. Its exceptional performance motivated developments of several modifications that make the EDMD an attractive method for analysis, model order reduction and numerical identification of nonlinear dynamical systems in data driven settings.

This course will present *state of the art* numerical methods for Koopman operator based computational analysis of nonlinear dynamics in data driven scenarios. It will require active participation and, in addition to lectures in the classroom, the material is mastered through homework reading assignments and software projects.

## **SYLLABUS:**

### **Introduction**

- 6. Motivating examples and problems**
- 7. The Koopman operator**
- 8. Data-driven framework**
- 9. Data-driven operator compression**

## **10. Koopman mode decomposition**

### **Finite dimensional computation: DMD and EDMD**

**7. SVD, low rank approximation and least squares**

**8. Schmid's DMD algorithm**

**9. A closer look: Rayleigh-Ritz extraction**

**10. Data-driven residuals and refined modes**

**11. Extended DMD**

**12. Kernels and kernel trick**

### **Snapshot reconstruction and forecasting**

- 4. Modal decomposition**
- 5. Structured weighted least squares problems**
- 6. Normal equations and Khatri-Rao product**

### **Physics informed EDMD**

- 3. Hermitian EDMD**
- 4. Measure preserving EDMD**

### **Data driven identification of nonlinear dynamics**

- 3. SINDy – Sparse Identification of Nonlinear Dynamics**
- 4. Identification by learning the Koopman semigroup generator**

**STUDENTS' OBLIGATIONS:** Class attendance, homework, computer projects.

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:** Obligations fulfilled completely

**FINAL EXAM:** Written elaboration of an individually given assignment; after acceptance by the professor, oral seminar presentation.

**PREREQUISITES :** Numerical mathematics (numerical linear algebra, numerical solution of ordinary and partial differential equations), analysis (measure theory,  $L_p$  spaces), elementary operator theory and software development skills (Matlab or Python).

**LITERATURE:**

9. H. Arbabi, I. Mezić. Ergodic theory, dynamic mode decomposition, and computation of spectral properties of the Koopman operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 16(4), 2096-2126, 2017.
10. S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems, *PNAS*, vol. 113, no. 1, April 12, 2016, pp. 3932-3937.
11. J. N. Kutz and S. L. Brunton and B. W. Brunton and J. L. Proctor: *Dynamic Mode Decomposition*, Society for Industrial and Applied Mathematics 2016.

12. A. Mauroy, J. Goncalves. Koopman-based lifting techniques for nonlinear systems identification, *IEEE Transactions on Automatic Control* 65 (6) 2020, 2550-2565.
13. P. J. Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics* 656, 5-28, 2010.
14. P. J. Schmid P. J. Data-driven and operator-based tools for the analysis of turbulent flows. *Advanced Approaches in Turbulence*, Durbin Paul (Ed.). Elsevier, 243-305. 2021.
15. J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton, and J. N. Kutz. On dynamic mode decomposition: Theory and applications. *Journal of Computational Dynamics* 1, 2 (2014), 391-421.
16. M. O. Williams, I. G. Kevrekidis and C. W. Rowley. A data-driven approximation of the Koopman operator: Extending dynamic mode decomposition. *Journal of Nonlinear Science* 25, 6 (2015), 1307-1346.

**SUPPLEMENTARY LITERATURE:**

11. P. J. Baddoo, B. Herrmann, B. J. McKeon, J. N. Kutz, and S. L. Brunton. Physics-informed dynamic mode decomposition (piDMD). arXiv:2112.04307.
12. M. Colbrook. The mpEDMD Algorithm for Data-Driven Computations of Measure-Preserving Dynamical Systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis* Vol. 61, Iss. 3 (2023).
13. M. Colbrook. The Multiverse of Dynamic Mode Decomposition Algorithms. arXiv:2312.00137v2

14. Z. Drmač, I. Mezić, and R. Mohr. Data driven modal decompositions: analysis and enhancements. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 40(4):A2253--A2285, 2018.
15. Z. Drmač, I. Mezić, and R. Mohr. Data driven Koopman spectral analysis in Vandermonde-Cauchy form via the DFT: numerical method and theoretical insights. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(5): A3118-A3151, 2019.
16. Z. Drmač, I. Mezić, and R. Mohr, On least squares problem with certain Vandermonde-Khatri-Rao structure with applications to DMD. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(5), A3250--A3284., 2020.
17. Z. Drmač, A LAPACK implementation of the Dynamic Mode Decomposition I., LAPACK Working Note 298, 2022. (ACM Transactions on Mathematical Software Volume 50 Issue 1 Article No.: 1 pp 1-32, 2024.)
18. Z. Drmač, A LAPACK implementation of the Dynamic Mode Decomposition II., LAPACK Working Note 300, 2022. (Hermitian Dynamic Mode Decomposition - Numerical Analysis and Software Solution, ACM Transactions on Mathematical Software Volume 50 Issue 1 Article No.: 2 pp 1-23, 2024.)
19. Z. Drmač, I. Mezić, and R. Mohr. Koopman lifting and identification using finite dimensional approximations of the infinitesimal generator - a numerical implementation of the Mauroy-Goncalves method. *Mathematics* 2021, 9(17), 2075.
20. M. R. Jovanović, P. J. Schmid and J. W. Nichols. Sparsity-promoting dynamic mode decomposition. *Physics of Fluids* 26, 2 (Feb. 2014), 024103.

<b>STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics</b>		
<b>SEMESTER:</b> one-semester (30 hours)		
<b>COURSE TITLE: Probabilistic Combinatorics</b>		
<b>CLASSES TYPE</b>	<b>#hours (weekly)</b>	<b>Professor/Lecturer</b>
lectures	2	Nina Kamčev
exercises		



<b>seminar</b>		
<b>ECTS POINTS:</b>		
<p><b>AIMS OF THE PROPOSED COURSE:</b></p> <p>This course in probabilistic combinatorics aims to provide students with a foundation in advanced probabilistic methods tailored for discrete problems. The aim is to apply essential techniques such as the first and second moment methods, martingale concentration, the entropy method, the Lovász Local Lemma and its algorithmic variants. Additionally, the course will explore recent developments, including random graph theory and the resolution of the Kahn-Kalai Conjecture.</p>		
<p><b>SYLLABUS:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <b>First and Second Moment Methods</b></li> <li>2. <b>Lovász Local Lemma (LLL) and Algorithmic Variants</b></li> </ol>		

3. Martingale theory, stochastic processes, and concentration inequalities.
4. **Random graphs**
5. **Kahn-Kalai Conjecture and its applications**
6. **Overview of Applications and Developments in Ramsey Theory, Additive Combinatorics, and Theoretical Computer Science**

**STUDENTS' OBLIGATIONS:** Class attendance, homework assignments and seminars

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:** Class attendance of at least 60% of the lectures.

**FINAL EXAM:** Seminars and / or homework assignments.

**PREREQUISITES:** Basic probability and combinatorics, asymptotic notation.

The students are welcome to take this course along with the course on Randomised Algorithms, or just one of them – some methods will be shared, but there will be little to no overlap in topics.

**LITERATURE:**

4. Alon, Noga, and Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. John Wiley & Sons, 2016.

5. Zhao, Yufei, *Probabilistic method in Combinatorics*. <https://yufeizhao.com/pm/>
6. Motwani, Rajeev, and Prabhakar Raghavan. *Randomized algorithms*. Cambridge university press, 1995.

**SUPPLEMENTARY LITERATURE:**

1. Perkins, Will. "Searching for (sharp) thresholds in random structures: where are we now?." *arXiv preprint arXiv:2401.01800* (2024).

**STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics**

**SEMESTER: 1. and 2.**

**COURSE TITLE: Application of intersection theory in enumerative geometry**

<b>CLASSES TYPE</b>	<b>hours (weekly)</b>	<b>Professor/Lecturer</b>
<b>lectures</b>	<b>2</b>	Matija Kazalicki
<b>exercises</b>	<b>0</b>	
<b>seminar</b>	<b>0</b>	
<b>ECTS POINTS:</b>		
<p><b>AIMS OF THE PROPOSED COURSE:</b> The goal of the course is to familiarize students with the intersection theory in algebraic geometry (a brief introduction to schemes, Chow ring) and to demonstrate its application in enumerative geometry. For example, it can be shown that generically there are 3264 conics that are tangent to five given conics.</p>		
<p><b>SYLLABUS:</b> Schemes – definition and basic properties. Basic ideas of intersection theory – Chow ring of projective spaces. Parameter spaces of singular cubic curves and the corresponding enumerative problem. Grassmannians and enumerative problems with lines. Chern classes and applications.</p>		

**STUDENTS' OBLIGATIONS: none**

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: none**

**FINAL EXAM: Seminar**

**PREREQUISITE: Basic understanding of algebraic geometry (at the undergrad level).**

**LITERATURE:**

D. Eisenbud, J. Harris: 3264 & All That

**ADDITIONAL LITERATURE:**

D. Eisenbud, J. Harris: The Geometry of Schemes

W. Fulton: Introduction to intersection theory in algebraic geometry

--

**STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics**

**SEMESTER:** Winter and spring (60 hours)

**COURSE TITLE: Vertex algebraic methods in representation theory**

<b>CLASSES TYPE</b>	<b>hours (weekly)</b>	<b>Professor/Lecturer</b>
<b>lectures</b>	<b>2</b>	Slaven Kožić

<b>exercises</b>		
<b>seminar</b>		
<b>ECTS POINTS:</b>		
<p><b>AIMS OF THE PROPOSED COURSE:</b> The goal of the course is to present modern vertex algebraic methods in the representation theory of certain infinite dimensional Lie algebras and quantum affine algebras. The course consists of three parts. In the first part, which serves as a motivation, we provide an introduction to the theory of affine Kac-Moody Lie algebras and their representations. The second part is dedicated to the vertex algebra theory. Special emphasis will be given to vertex algebras associated with infinite dimensional Lie algebras, such as affine Lie algebras. In the third part of the course, we provide an introduction to quantum affine algebras, a certain class of quantum groups associated with trigonometric R-matrices. Finally, we develop the underlying theory of <math>\varphi</math>-coordinated modules for quantum vertex algebras.</p>		
<b>SYLLABUS:</b>		

1. Affine Lie algebras
2. Representations of affine Lie algebras
3. Introduction to vertex algebra theory
4. Vertex algebras associated with infinite dimensional Lie algebras
5. Introduction to quantum affine algebras and their representation theory
6.  $\varphi$ -coordinated modules for quantum vertex algebras

**STUDENTS' OBLIGATIONS:** Attending lectures, doing homeworks, holding a seminar

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:** Attending lectures

**FINAL EXAM:** Homework assignments solved and oral seminar presentation held

**PREREQUISITE:** Basic knowledge from the areas of linear algebra and vector spaces is sufficient. Some knowledge of algebraic structures is



useful, but not necessary.

**LITERATURE:**

1. J. Lepowsky, H.-S. Li, Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 2003.
2. H.-S. Li,  $\varphi$ -Coordinated Quasi-Modules for Quantum Vertex Algebras, Communications in Mathematical Physics 308 (2011), 703–741.
3. J. Hong, S.-J. Kang, Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases, American Mathematical Society, 2002.
4. V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, 1990.

**ADDITIONAL LITERATURE:**

1. R. Carter, Lie Algebras of Finite and Affine Type, Cambridge University Press, 2005.
2. I. B. Frenkel, N. Jing, Vertex representations of quantum affine algebras, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 85 (1988), 9373-9377.
3. J. C. Jantzen, Lectures on Quantum Groups, American Mathematical Society, 1996.

4. V. Kac, Vertex algebras for beginners, University Lecture Series, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

**STUDY PROGRAM:** PhD Program in Mathematics

**SEMESTER:** one-semester (30 hours)

**COURSE TITLE:** Random walks and circle packing

**CLASSES TYPE**

**#hours (weekly)**

**Professor/Lecturer**

<b>lectures</b>	<b>2</b>	Rudi Mrazović
<b>exercises</b>		
<b>seminar</b>		
<b>ECTS POINTS:</b>		
<b>AIMS OF THE PROPOSED COURSE:</b>		
<p>Assume we have a circle packing of the plane, that is, a collection of circles that have disjoint interiors. From this packing, we construct a planar graph in such a way that for each circle we associate a vertex that we draw in its center, and draw edges connecting pairs of vertices whose circles touch. In this way, we get a planar graph. One can actually realize every planar graph in</p>		

the previously described way using a circle packing. The aim of the course is to show the connection between the probabilistic properties of a graph (more precisely, the recurrence of a random walk on it) and the corresponding circle packing. If time permits, the connection between circle packing and discrete holomorphic mappings will be discussed.

**SYLLABUS:**

random walks and electric networks, circle packing theorem, parabolic and hyperbolic packings, planar local graph limits, recurrence of random planar maps, uniform spanning trees of planar graphs

**STUDENTS' OBLIGATIONS:** Class attendance, homework assignments and seminar projects.

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:** Class attendance of at least 60% of the lectures.

**FINAL EXAM:** seminars

**PREREQUISITES:** probability theory, complex analysis

**LITERATURE:**

1. Steffen Rohde. *Oded Schramm: from circle packing to SLE*. *Annals of Probability*, 39(5):1621–1667, 2011
2. Asaf Nachmias. *Planar Maps, Random Walks and Circle Packings*. Springer (2020)
3. Kenneth Stephenson. *Introduction to circle packing*. Cambridge University Press (2005)

**SUPPLEMENTARY LITERATURE:**

<b>STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics</b>		
<b>SEMESTER:</b> Two-semester (60 hours)		
<b>COURSE TITLE: General theory of linear damped systems I and II</b>		
<b>CLASSES TYPE</b>	<b>#hours (weekly)</b>	<b>Professor/Lecturer</b>
<b>lectures</b>	<b>2</b>	<p>Prof dr. sc. <b>Krešimir Veselić</b>;  Fernuniversitat Hagen,  Fakultat fur Mathematik und Informatik  Hagen, Germany</p> <p>Prof. dr. sc. <b>Ninoslav Truhar</b>,  Department of Mathematics  Josip Juraj Strossmayer University of Osijek</p>
<b>exercises</b>	<b>0</b>	

seminar	0	
<b>ECTS POINTS: to be filled in by the admin stuff</b>		
<p><b>AIMS OF THE PROPOSED COURSE:</b></p> <p>This course covers topics in the field of linear control theory of vibrational systems, with an emphasis on optimization and their dynamics. Based on physical models, the theory of linear damped systems will be developed. We will mainly focus on finite-dimensional systems, although some generalizations will be made. The main goal is to prepare for optimization problems of such systems, which will be addressed in the second part.</p> <p>The second part is dedicated to studying the numerical properties of linear dynamic systems with illustrations on simple mechanical models. For this purpose, direct and iterative methods for solving Sylvester and Lyapunov equations will be studied. Furthermore, damping optimization will be explored, focusing on optimization criteria and methods for damping optimization of rank 1 and higher rank, including direct and iterative methods. Through examples and algorithm presentations in programming languages such as Octave and Matlab, concepts and methods covered in the theoretical part will be illustrated and demonstrated.</p>		
<p><b>SYLLABUS</b></p> <p>Part I:</p>		

1. Model
2. Simultaneous diagonalization (Modal damping)
3. Phase space
4. Spaces with indefinite scalar product and associated operators
5. Oblique and J-orthogonal projections
6. Spectral properties and reduction of J-Hermitian matrices
7. Definite spectra
8. Spectral decomposition of a general J-Hermitian matrix
9. Matrix exponential function (semigroup)
10. Quadratic eigenvalue problem
11. Passive control, general facts about Lyapunov optimization

Part II:

1. Introduction and motivation
2. Linear dynamic systems
  - 2.1. Model of masses connected by springs
  - 2.2. Model of string and stick
3. Sylvester and Lyapunov equations



- 3.1. Direct methods
- 3.2. Iterative methods
- 4. Damping optimization
  - 4.1. Optimization criteria
  - 4.2. Rank 1 damping optimization
    - 4.2.1. Viscosity optimization
    - 4.2.2. Position optimization
- 5. Higher rank damping optimization
  - 5.1. Direct methods (Newton)
  - 5.2. Iterative methods
- 6. Examples and algorithm presentation (Octave, Matlab)

**STUDENTS' OBLIGATIONS:**

Part of the lecture (if necessary) will take place online.

Student is obliged to present at least one seminar with approval of lecturer.

**FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:** It is required that student presents at least one seminar before oral exam.

**FINAL EXAM:** final exam is oral

**PREREQUISITES :** It is assumed that students are familiar with the basic concepts of numerical mathematics (numerical linear algebra and numerical analysis).

**LITERATURE:**

1. I. Aganović, K. Veselić, Matematičke metode i modeli (Croatian), Sveučilište Josipa Jurja; Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, 2014
2. K. Veselić, Linear Oscillations of Damped Systems Springer 2011, <https://www.fernuni-hagen.de/MATHPHYS/veselic/pslist.html>
3. K. Veselić, Bounds for contractive semigroups and second order systems, Operator Theory: Advances and Applications, 162, (2005) 293-308 at <https://www.fernuni-hagen.de/MATHPHYS/veselic/pslist.html>
4. A. C. Antoulas, Approximation of Large-Scale Dynamical Systems, SIAM, Philadelphia, 2005.
5. B. N. Datta, " Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis" , Elsevier Academic Press, 2003.
6. G. H. Golub, C. F. Van Loan, Matrix Computations, 3rd ed. The Johns Hopkins University Press, 1996, Baltimor.
7. G.W. Stewart, J. G. Sun, Matrix perturbation theory. Academic Press, 1990

**SUPPLEMENTARY LITERATURE:**

2. T. Kato, Perturbation Theory for linear Operators, Springer 1966  
[https://books.google.de/books?hl=en&lr=&id=k-7nCAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq=tosio+kato&ots=w8HFuhjaBD&sig=ggxePydewZKNb7mJGynTT-rBeFM&redir\\_esc=y#v=onepage&q=tosio%20kato&f=false](https://books.google.de/books?hl=en&lr=&id=k-7nCAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq=tosio+kato&ots=w8HFuhjaBD&sig=ggxePydewZKNb7mJGynTT-rBeFM&redir_esc=y#v=onepage&q=tosio%20kato&f=false)
2. Ivica Nakić: Optimal Damping of vibrational systems, PH Disertation Frenuniversität in Hagen 2003  
<https://www.fernuni-hagen.de/MATHPHYS/veselic/doktorandi.html>
3. K. Veselić. On linear vibrational systems with one dimensional damping. Appl Anal, 29:1–18, 1988.
4. K. Veselić. On linear vibrational systems with one dimensional damping II. Integral Eq. Operator Th., 13:883–897, 1990.
5. Ph.D thesis: Jing-Rebecca Li, <http://www-rocq.inria.fr/~jli/thesis.ps>
6. N. Truhar and K. Veselić, Bounds on the trace of a solution to the Lyapunov equation with a general stable matrix, Systems & Control Letters, 56 (2007) , 7-8; 493-503  
[http://www.mathos.hr/~ntruhar/Index/revised\\_decayADI\\_pub.pdf](http://www.mathos.hr/~ntruhar/Index/revised_decayADI_pub.pdf)
7. N. Truhar and K. Veselić. On some properties of the Lyapunov equation for damped systems. Math. Commun., 9:189–197, 2004.
8. N. Truhar and K. Veselić, An efficient method for estimating the optimal dampers' viscosity for linear vibrating systems using Lyapunov equation. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 31(1):18–39, 2009.
9. D. C. Sorensen and Y. Zhou, Bounds on eigenvalue decay rates and sensitivity of solutions to Lyapunov equations. (Technical Report)  
[http://www.caam.rice.edu/tech\\_reports/2002/TR02-07.pdf](http://www.caam.rice.edu/tech_reports/2002/TR02-07.pdf)

## **ZNANSTVENI SEMINARI**

### **Sveučilište u Zagrebu**

- Seminar za diferencijalne jednađbe i numeričku analizu
- Seminar za diferencijalne jednađbe i nelinearnu analizu
- Seminar za topologiju
- Seminar za matematičku logiku i osnove matematike
- Seminar za funkcionalnu analizu
- Seminar za teoriju vjerojatnosti

- Seminar za teoriju reprezentacija
- Seminar za teoriju brojeva i algebru
- Seminar za geometriju
- Seminar za matematičko programiranje i teoriju igara
- Seminar za kombinatoriku i diskretnu matematiku
- Seminar za numeričku matematiku i znanstveno računanje
- Seminar za diferencijalnu geometriju
- Seminar za konačne geometrije i grupe
- Seminar za nejednakosti i primjene
- Seminar za teorijsko računarstvo

- Seminar za algebru
- Seminar za unitarne reprezentacije i automorfne forme
- Seminar za metodiku nastave matematike
- Seminar za analizu
- Seminar za dinamičke sustave
- Seminar za analizu i algebru Alpe–Jadran (Hrvatska–Slovenija (Ljubljana, Maribor, Kopar))

#### **Sveučilište u Osijeku**

- Seminar za optimizaciju i primjene

### **Sveučilište u Splitu**

- Topološki seminar
- Seminar za diskretnu matematiku

### **Sveučilište u Rijeci**

- Seminar za konačnu matematiku
- Seminar za matematičku analizu i primjene

**PRAVILA STUDIRANJA NA ZAJEDNIČKOM SVEUČILIŠNOM POSLIJEDIPLOMSKOM DOKTORSKOM STUDIJU IZ ZNANSTVENOG POLJA MATEMATIKE KOJEG IZVODI MATEMATIČKI ODSJEK PMF-a**

Odredbama Pravilnika o doktorskim studijima na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu (dalje: Pravilnik) KLASA: 033-05/18-01/1003, URBROJ: 251-58-10201-19-10001 od 4. srpnja 2019. godine uređuje se ustroj i izvođenje doktorskih studija, nastava i istraživanje na doktorskim studijima, uvjeti upisa i trajanje studija, način izvedbe studija, mentorstvo, postupak prijave, ocjene i obrane doktorske disertacije, prava i obveze studenata doktorskih studija.

Pravilnik iz prethodnog stavka primijenjuje se na studente upisane na doktorske studije na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu (dalje: Fakultet) od akademske godine 2019./2020.



Pravilima studiranja na zajedničkom poslijediplomskom doktorskom studiju matematike (dalje: doktorski studij matematike) kojeg organizira i izvodi Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu uz sudjelovanje Sveučilišta u Rijeci, Osijeku i Splitu, uređuju se posebna pravila vazana za upis na doktorski studij matematike, uvjeti koje pristupnici trebaju ispuniti, ustroj, izvedba i završetak dokorskog studija.

**Upis na doktorski studij matematike**

## I.

(1) Na inicijativu Vijeća doktorskog studija, Vijeće Matematičkog odsjeka predlaže Fakultetskom vijeću raspis javnog natječaja za upis pristupnika na studij. Natječaj se raspisuje svake godine u rujnu ili listopadu, oglašavanjem u javnom tisku i na Internetskim stranicama Fakulteta.

(2) Pristupnici koji se prijavljuju na natječaj iz prethodnog stavka moraju to učiniti u roku predviđenom natječajem, pri čemu moraju ispunjavati sljedeće uvjete:

- završen diplomski studij matematike, matematike i informatike ili matematike i fizike na jednom od Sveučilišta iz stavka 1., ili odgovarajući studij u inozemstvu sukladno odredbama Zakona o priznavanju inozemnih obrazovnih kvalifikacija. Izuzetno se može odobriti upis pristupnicima koji su završili neki od studija bliskih studiju matematike (fizika, elektrotehnika i slično). Takvo odobrenje daje Kolegij doktorskog studija;

- minimalna prosječna ocjena tijekom diplomskog studija mora biti najmanje 3,5. Izuzetno se može odobriti upis i s prosječnom ocjenom iznad 3,0. Takvo odobrenje daje Kolegij doktorskog studija;

- pristupnik mora poznavati barem jedan od svjetskih jezika u mjeri koja osigurava normalno praćenje matematičke literature.

## **II.**

(1) Pristupnici koji se prijave na natječaj i ispune uvjete iz natječaja pozvat će se na upis.

(2) Pristupnik bira i upisuje predmete na način i u opsegu koji je propisan nastavnim planom i programom studija, a uz suglasnost voditelja doktorskog studija.

(3) U izuzetnim će se slučajevima odobriti upis i pristupniku koji se javi nakon proteka roka predviđenog natječajem, ali ne nakon 31. prosinca tekuće akademske godine.

(4) Troškovi studija se podmiruju pod uvjetima, u visini i na način predviđen ugovorom o studiranju.

Ustroj i izvedba doktorskog studija matematike

## **III.**

(1) Vijeće doktorskog studija na prijedlog Kolegija doktorskog studija svake četiri godine određuje jednu do četiri matematičke discipline koje spadaju u teorijsku grupu predmeta i jednu do četiri matematičke discipline koje spadaju u primijenjenu grupu predmeta. Za svaku od odabranih disciplina određuje se jedan osnovni predmet za sljedeće četiri godine.

(2) Svake četiri godine Kolegij doktorskog studija određuje sadržaj osnovnog predmeta iz svake od disciplina navedenih u prethodnom stavku. Svake godine mora biti ponuđen barem jedan osnovni predmet iz svake disciplina iz stavka 1. Sadržaj osnovnog predmeta ujedno predstavlja i materijal potreban za polaganje pristupnog ispita.

#### **IV.**

(1) Za svaku od disciplina navedenih u točki III. stavku 1. postoji pristupni ispit.

(2) Za svaku od disciplina navedenih u točki III. stavku 1. Kolegij doktorskog studija određuje svake godine tročlano ispitno povjerenstvo.

(3) Pristupni se ispiti mogu polagati samo u ožujku, lipnju, listopadu i prosincu svake godine i moraju se prijaviti voditelju doktorskog studija barem mjesec dana unaprijed.

(4) Pristupni se ispiti mogu polagati direktno ili kroz osnovni predmet, ali u svakom slučaju pred ispitnim povjerenstvom iz stavka 2. ove točke.

(5) Pristupni su ispiti usmeni, a ispitno povjerenstvo može, ako ocijeni potrebnim, odrediti i pismeni dio ispita.

(6) Na svaki se pristupni ispit može pristupiti najviše dva puta. Student koji nakon dva puta ne uspije položiti pristupni ispit gubi pravo na nastavak studija.

## V.

(1) Svake godine određuju se predmeti koji trebaju prezentirati suvremena matematička istraživanja za koja postoji jak interes u matematici, ili klasične teorije koje su od fundamentalnog značenja za daljnji razvoj matematike. Pri odabiru predmeta vodit će se briga o razini sadržaja i ravnomjernoj zastupljenosti područja matematike. Godišnje se predviđa ponuda od 8 do 16 predmeta (uključujući i osnovne predmete).

(2) Svake se godine utvrđuje lista poslijediplomskih seminara. Za nastavak rada postojećeg seminara, nužan je uvjet održavanje barem 8 seminara u prethodnoj akademskoj godini.

(3) Predmete iz stavka 1., zajedno s njihovim programima, te poslijediplomske seminare, predlaže voditelj doktorskog studija u konzultaciji s Kolegijem doktorskog studija.

## **VI.**

(1) Svaki student odabire dva pristupna ispita iz disciplina navedenih u točki III. stavku 1.

(2) Svaki student mora tijekom studija, a prije upisa u drugu godinu studija, položiti dva pristupna ispita i to najmanje ocjenom 4 (vrlo dobar).

## **VII.**

(1) Voditelj doktorskog studija brine o ravnomjernoj podjeli upisanih predmeta u odnosu na osnovne smjerove matematike, a također i na predavače.

(2) Tijekom prve godine studija Vijeće doktorskog studija određuje studijskog savjetnika studentu u dogovoru sa studentom i nastavnikom.

## VIII.

(1) Tijekom studija vrijedi sljedeći sustav vrednovanja:

Osnovni predmet	6 ECTS bodova
Napredni kolegij 60 sati	8 ECTS bodova

Napredni kolegij 30 sati	4 ECTS boda
Uvod u istraživački rad	24 ECTS bodova
Seminar	20 ECTS bodova
Znanstveni kolokvij	4 ECTS boda
Istraživački rad	20 ECTS bodova
Doktorska disertacija	28 ECTS bodova



(2) U prvoj godini studija upisuju se dva osnovna predmeta (pristupni ispiti), uvod u istraživački rad, jedan seminar i znanstveni kolokvij.

(3) Za polaganje poslijediplomskih seminara, student mora u prve dvije godine studija s uspjehom održati barem dva seminara, a u trećoj godini studija barem četiri seminara temu kojih određuje voditelj seminara.

(4) U izuzetnim slučajevima voditelj doktorskog studija može odobriti promjenu upisanog seminara.

(5) Sudjelovanje na više od 50% znanstvenih kolokvija uvjet je za dobivanje potpisa iz kolokvija. Evidenciju dolazaka studenata na kolokvij provodi voditelj kolokvija, koji je također ovlašten davati potpise. U slučaju opravdane spriječenosti sudjelovanja na znanstvenom kolokvij, student može u dogovoru s voditeljem seminara i voditeljem doktorskog studija održati jedan dodatni seminar kako bi ostvario pravo na potpis iz kolokvija. Takav seminar ne smije biti usko tematski vezan uz disertaciju. U takvim slučajevima potpis iz kolokvija daje voditelj seminara.

## **IX.**

(1) Uvjet za upis u drugu godinu su potpisi iz svih upisanih predmeta, znanstvenog kolokvija, seminarara, položen seminar iz prve godine te položena dva pristupna ispita.

(2) U drugoj se godini upisuju napredni kolegiji, istraživački rad, jedan seminar i znanstveni kolokvij. Student upisuje i polaže napredne kolegije koji vrijede 16 ECTS bodova.

## **X.**

(1) Uvjeti za upis u treću godinu studija su pisana preporuka mentora, seminar iz prethodne godine, potpis iz znanstvenog kolokvija i položeni napredni kolegiji u vrijednosti od barem 8 ECTS bodova.

(2) U trećoj godini studija upisuju se napredni kolegiji, izrada doktorske disertacije, jedan seminar i znanstveni kolokvij. Student upisuje i polaže napredne kolegije koji vrijede barem 8 ECTS bodova.

Završetak studija

## **XI.**

- (1) Studij završava obranom doktorskog rada (disertacije).
- (2) Disertacija je pisani rad u kojem su izložena originalna matematička otkrića koja pripadaju autoru (dopušta se mogućnost da je autor dio tih otkrića već publicirao).
- (3) Nacrt disertacije ne može se prijaviti prije nego što kandidat položi dva pristupna ispita.