

Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačini:

- Uvod
- Inicijalni problem
- Jednokoračne metode
- (Eksplisitne) Runge-Kuttine metode
- Konvergencija Runge-Kuttinih metoda
- Apsolutna stabilnost i implicitne Runge-Kuttine metode
- Linearne višekoračne metode
- Adams-Bashforth-Moultonove metode
- BDF metode
- Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
- Apsolutna stabilnost

Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi

Obična diferencijalna jednačba (ODJ)

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in (a, b),$$

- početni uvjet $y(a) = y_0$ ili

- rubni uvjet $r(y(a), y(b)) = 0$, gdje je r neka zadana funkcija.

Sustav običnih diferencijalnih jednačbi:

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$\vdots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n).$$

Vektorska notacija:

$$\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$$

sustav pišemo u analognom obliku:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)).$$

Primijenjujemo iste numeričke metode kao za rješavanje skalarne diferencijalne jednačbe.

Vodimo računa o tome da se umjesto skalarnih funkcija y i f javljaju vektorske funkcije \mathbf{y} i \mathbf{f} .

Diferencijalne jednačbe višeg reda

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

supstitucijama

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

svodimo na sustav jednačbi prvog reda:

$$y_1' = y' = y_2,$$

$$y_2' = y'' = y_3,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n,$$

$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n).$$

I u ovom slučaju možemo koristiti metode razvijene za skalarnu diferencijalnu jednačbu.

I za sustav diferencijalnih jednačbi i za jednačbu višeg reda razlikujemo

- inicijalni (početni ili Cauchyjev) problem
- rubni problem

Primjer

Diferencijalna jednačba

$$y'' = -y$$

ima opće rješenje

$$y(x) = a \sin x + b \cos x$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

Inicijalni problem, gornja jednačba uz početne uvjete

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta$$

ima rješenje

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

za proizvoljne α i β .

S druge strane, za rubni problem se pojavljuju različite situacije.
Za rubne uvjete

$$y(0) = \alpha, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta$$

rješenje je

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

za proizvoljne α i β .

Za rubne uvjete

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

rješenje je

$$y(x) = a \sin x$$

za proizvoljni $a \in \mathbb{R}$. Rješenje **nije jedinstveno**.

Za rubne uvjete

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$$

rješenje **ne postoji** jer

$$y(0) = 0 \Rightarrow a \sin 0 + b \cos 0 = 0 \Rightarrow b = 0$$

i

$$y(\pi) = 1 \Rightarrow 1 = a \sin \pi = 0.$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednažbu.

Neki teoremi iz teorije običnih diferencijalnih jednažbi

Promatramo sustav od n diferencijalnih jednažbi

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

$\| \cdot \|$ - norma na \mathbb{R}^n

$\| A \|$ - pridružena matrična norma, $\| I \| = 1$

Teorem

Neka je f definirana i neprekidna na traci

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R}^n\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, neka postoji konstanta L takva da je

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|$$

za sve $x \in [a, b]$ i za sve $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ (Lipshitzov uvjet).

Tada za svaki $x_0 \in [a, b]$ i svaki $y_0 \in \mathbb{R}^n$ postoji točno jedna funkcija $y(x)$ takva da

- $y(x)$ je neprekidna i neprekidno derivabilna za $x \in [a, b]$;
- $y'(x) = f(x, y(x))$ za $x \in [a, b]$;
- $y(x_0) = y_0$.

Ako parcijalne derivacije $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $i, j = 1, \dots, n$ postoje na traci S te su neprekidne i ograničene

$\Rightarrow f$ zadovoljava Lipshitzov uvjet.

$F_N(a, b)$ - skup funkcija za koje postoje sve parcijalne derivacije do reda N te su neprekidne i ograničene.

Funkcija $f \in F_1(a, b)$ zadovoljava pretpostavke teorema.

U primjenama, f je obično neprekidna na S i također neprekidno diferencijabilna ali derivacije $\partial f_i / \partial y_j$ su često neograničene.

Tada je inicijalni problem rješiv, ali rješenje je definirano samo u nekoj okolini oko x_0 (početne točke) a ne na cijelom segmentu $[a, b]$.

Primjer. Inicijalni problem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

ima rješenje

$$y(x) = \frac{1}{1-x},$$

koje je definirano samo za $x < 1$

Postojanje rješenja u prethodnom teoremu je osigurano ako je f samo neprekidna. Dodatno Lipschitzovo svojstvo osigurava da je rješenje jedinstveno. Za ilustraciju, pogledajmo sljedeći problem sa $f(t, x) = x^{1/3}$:

Primjer

$$y'(t) = y(t)^{1/3}$$

Ako je zadano i $y(0) = 0$ onda je $y(t) \equiv 0$ očito jedno rješenje, a lako se provjeri da je još jedno rješenje dano s

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} & \text{za } t \geq 0 \\ 0 & \text{za } t \leq 0 \end{cases} .$$

Uočavamo da f u okolini nule nije Lipschitzova jer npr. za $x > 0$ imamo

$$\left| \frac{f(t, x) - f(t, -x)}{x - (-x)} \right| = \frac{1}{x^{2/3}}$$

i gornji kvocijent se ne može uniformno omeđiti.

Primjer

Jednačba

$$y'(x) = -y(x) + 1, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 1,$$

ima rješenje

$$y(x) = 1.$$

Ako perturbiramo početni uvjet:

$$y'_\varepsilon(x) = -y_\varepsilon(x) + 1, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y_\varepsilon(0) = 1 + \varepsilon,$$

rješenje je

$$y_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon e^{-x}.$$

Razlika je

$$y(x) - y_\varepsilon(x) = -\varepsilon e^{-x},$$

odnosno

$$\|y(x) - y_\varepsilon(x)\| \leq |\varepsilon|, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Male promjene u početnim uvjetima rezultiraju malim promjenama u rješenju.

Ovakav se problem naziva **dobro uvjetovan**.

Primjer

Jednadžba

$$y'(x) = \lambda[y(x) - 1], \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 1,$$

ima rješenje

$$y(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Perturbirani problem

$$y'_\varepsilon(x) = \lambda[y_\varepsilon(x) - 1], \quad 0 \leq x \leq b, \quad y_\varepsilon(0) = 1 + \varepsilon,$$

ima rješenje

$$y_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon e^{\lambda x}.$$

Pogreška je

$$y(x) - y_\varepsilon(x) = -\varepsilon e^{\lambda x},$$

odnosno

$$\max_{0 \leq x \leq b} |y(x) - y_\varepsilon(x)| \leq \begin{cases} |\varepsilon|, & \lambda \leq 0, \\ |\varepsilon| e^{\lambda b}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Jednačba je dobro uvjetovana za $\lambda \leq 0$.

Za λb umjereno velik (npr. $\lambda b \geq 10$), pogreška je prilično značajna u $x = b$.

Problem postaje sve više i više **loše uvjetovan** kako se λ smanjuje.

Inicijalni problem neprekidno ovisi o početnoj vrijednosti.

Teorem

Neka je funkcija $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidna na traci

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R}^n\}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

i neka zadovoljava Lipshitzov uvjet

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|$$

za sve $(x, y_1), (x, y_2) \in S$. Neka je $a \leq x_0 \leq b$. Tada za $y(x; s)$, rješenje inicijalnog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0; s) = s$$

vrijedi ocjena

$$\| y(x; s_1) - y(x; s_2) \| \leq e^{L|x-x_0|} \| s_1 - s_2 \|$$

Eulerova metoda

Naš cilj su numeričke metode za rješavanje IP za ODJ.

Riješiti IP numerički znači izračunati aproksimacije vrijednosti $y(x_i)$ u konačno točaka x_1, \dots, x_n u zadanom intervalu $[x_0, b]$.

Ključni element numeričkog rješavanja inicijalnog problema je kako iskoristiti diferencijalnu jednačbu i od poznate vrijednosti $y(x_0)$ dobiti što bolju aproksimaciju za $y(x_1)$ i tako dalje,

$x_0 \curvearrowright x_1 \curvearrowright \dots \curvearrowright x_k \curvearrowright x_{k+1} \curvearrowright \dots$ sve do zadnje točke x_n .

Eulerova metoda - najjednostavnija metoda za rješavanje inicijalnog problema za ODJ oblika

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0.$$

Osnovna ideja: y' se zamijeni s podijeljenom razlikom

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

Rješenje diferencijalne jednačbe zadovoljava

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h y'(x) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= y(x) + h f(x, y(x)) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Zanemarimo kvadratni član:

$$y(x + h) \approx y(x) + hf(x, y(x)).$$

Interval $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova:

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n.$$

Prvo aproksimiramo rješenje u točki $x_1 = a + h$

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Dobivenu aproksimaciju y_1 iskoristimo za računanje aproksimacije rješenja u točki $x_2 = x_1 + h$:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

Postupak ponavljamo sve dok ne dođemo do kraja intervala $b = x_n$.

Opisani postupak nazivamo Eulerova metoda, i možemo ga kraće zapisati rekurzijom

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je početni uvjet y_0 zadan kao inicijalni uvjet diferencijalne jednačbe.

Dobivene vrijednosti y_i su aproksimacije rješenja diferencijalne jednačbe u točkama x_i .

Primjer

Egzaktno rješenje inicijalnog problema

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

je dano s

$$y(x) = e^{-x}.$$

Eulerova metode je dana s

$$y_{n+1} = y_n - h y_n, \quad n \geq 0,$$

uz $y_0 = y(0) = 1$. Za $h = 0.1$ je

$$y_1 = y_0 - h y_0 = 1 - 0.1 \cdot 1 = 0.9, \quad x_1 = 0.1$$

$$y_2 = y_1 - h y_1 = 0.9 - 0.1 \cdot 0.9 = 0.81, \quad x_2 = 0.2$$

...

Pogreške su:

$$y(x_1) - y_1 = e^{-0.1} - 0.9 = 0.004837$$

$$y(x_2) - y_2 = e^{-0.2} - 0.81 = 0.008731$$

...

Eulerova metoda

h	x	$y_h(x)$	Pogreška
0.2	1.0	3.2768e-1	4.02e-2
	2.0	1.0738e-1	2.80e-2
	3.0	3.5184e-2	1.46e-2
	4.0	1.1529e-2	6.79e-3
	5.0	3.7779e-3	2.96e-3
0.1	1.0	3.4867e-1	1.92e-2
	2.0	1.2158e-1	1.38e-2
	3.0	4.2391e-2	7.40e-3
	4.0	1.4781e-2	3.53e-3
	5.0	5.1538e-3	1.58e-3
0.05	1.0	3.5849e-1	9.39e-3
	2.0	1.2851e-1	6.82e-3
	3.0	4.6070e-2	3.72e-3
	4.0	1.6515e-2	1.80e-3
	5.0	5.9205e-3	8.17e-4

Eulerova metoda

h	x	$y_h(x)$	Pogreška
0.2	1.0	3.2768e-1	4.02e-2
	2.0	1.0738e-1	2.80e-2
	3.0	3.5184e-2	1.46e-2
	4.0	1.1529e-2	6.79e-3
	5.0	3.7779e-3	2.96e-3
0.1	1.0	3.4867e-1	1.92e-2
	2.0	1.2158e-1	1.38e-2
	3.0	4.2391e-2	7.40e-3
	4.0	1.4781e-2	3.53e-3
	5.0	5.1538e-3	1.58e-3
0.05	1.0	3.5849e-1	9.39e-3
	2.0	1.2851e-1	6.82e-3
	3.0	4.6070e-2	3.72e-3
	4.0	1.6515e-2	1.80e-3
	5.0	5.9205e-3	8.17e-4

h	Pogreška
0.2	2.96e-3
0.1	1.58e-3
0.05	8.17e-4

Pogreška se ponaša kao $C h^k$. Koliki je k za Eulerovu metodu?

Dva puta manji h , dva puta manja pogreška! $k = 1$.

Pogreška: $C h$.

Kažemo da je red konvergencije Eulerove metode 1.

Analiza pogreške Eulerove metode

Eulerova metoda:

$$y_{i+1} - y_i - h f(x_i, y_i) = 0.$$

Ako umjesto y_i uvrstimo $y(x_i)$, egzaktno rješenje jednačbe $y' = f(x, y)$,

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y(x_i) - h f(x_i, y(x_i)) &= \text{(Taylorov razvoj)} \\ &= y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(\zeta_i) - y(x_i) - h f(x_i, y(x_i)) = (y' = f(x, y)) \\ &= h f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\zeta_i) - h f(x_i, y(x_i)) = \\ &= \frac{1}{2} h^2 y''(\zeta_i) = T_{i+1}. \end{aligned}$$

Član T_{i+1} se naziva **pogreška odsjecanja** ili **lokalna pogreška diskretizacije**.

Zanima nas stvarna pogreška

$$e_i = y(x_i) - y_i.$$

Oduzimanjem

$$\begin{aligned}y(x_{i+1}) &= -y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}h^2 y''(\zeta_i) \quad i \\y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i)\end{aligned}$$

Dobivamo

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_i) - y_i + h [f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)] + \frac{1}{2}h^2 y''(\zeta_i)$$

Ako postoji $\partial f / \partial y$, možemo pojednostaviti:

$$f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial y} (y(x_i) - y_i).$$

Sada je

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \left[1 + \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial y} \right] (y(x_i) - y_i) + \frac{1}{2} h^2 y''(\zeta_i)$$

Ako uvrstimo $e_i = y(x_i) - y_i$:

$$e_{i+1} = \left[1 + \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial y} \right] e_i + \frac{1}{2} h^2 y''(\zeta_i)$$

Primjer

Promatrajmo primjenu Eulerove metode na problem

$$y'(x) = 2x, \quad y(0) = 0.$$

Egzaktno rješenje je $y(x) = x^2$.

Formula za pogrešku daje

$$e_{i+1} = \left[1 + h \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial y} \right] e_i + \frac{1}{2} h^2 y''(\zeta_i) = e_i + h^2.$$

$$e_{i+1} = e_i + h^2, \quad e_0 = 0.$$

Indukcijom slijedi:

$$e_i = i h^2 = x_i h \quad (\text{jer je } i h = t_i).$$

Pogreška odsjecanja je $\mathcal{O}(h^2)$ ali kumulativni efekt rezultira s ukupnom pogreškom proporcionalnom s h .

Vratimo se na

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_i) - y_i + h [f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)] + \frac{1}{2}h^2 y''(\zeta_i)$$

Ako je f Lipshitzova u varijabli y :

$$|f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)| \leq L|y(x_i) - y_i|,$$

vrijedi

$$|e_{i+1}| \leq (1 + hL)|e_i| + \frac{1}{2}h^2 |y''(\zeta_i)|.$$

Vrijedi

$$|y''(\zeta_i)| \leq \max_{0 \leq x \leq b} |y''(x)| = \|y''\|_{\infty}.$$

Označimo

$$\tau_i = \frac{T_i}{h} = \frac{1}{2}hy''(\zeta_i)$$

$$|\tau_i| = \frac{1}{2}h|y''(\zeta_i)| \leq \frac{1}{2}h \|y''\|_{\infty} =: \tau(h).$$

Pogreške sada zadovoljavaju

$$|e_{i+1}| \leq (1 + hL) |e_i| + h\tau(h).$$

Rekurzivnom primjenom ove nejednakosti dobijamo

$$|e_n| \leq (1 + hL)^n |e_0| + \left[1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2 \dots + (1 + hL)^{n-1} \right] h\tau(h).$$

Iz

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1,$$

slijedi

$$|e_n| \leq (1 + hL)^n |e_0| + \frac{(1 + hL)^n - 1}{h} \tau(h).$$

Izraz $(1 + hL)^n$ možemo malo bolje ocijeniti.

Lema

Za proizvoljni $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$1 + t \leq e^t,$$

i za svaki $t \geq -1$ i za svaki $m \geq 0$ vrijedi

$$0 \leq (1 + t)^m \leq e^{mt}.$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz Taylorovog razvoja

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 e^\xi.$$

Druga tvrdnja lagano slijedi iz prve. □

Sada ovo primijenimo na

$$(1 + hL)^n \leq e^{nhL} = e^{bL}$$

jer je $nh = t_n = b$.

Ocjena pogreške

$$|e_n| \leq (1 + hL)^n |e_0| + \frac{(1 + hL)^n - 1}{L} \tau(h).$$

\Rightarrow

$$|e_n| \leq e^{bL} |e_0| + \frac{e^{bL} - 1}{L} \tau(h) = e^{bL} |e_0| + \frac{e^{bL} - 1}{2L} h \|y''\|_{\infty}.$$

Pretpostavke tvrdnje

- $y \in C^2(0, b)$
- f je Lipshitzova funkcija (u varijabli y)

Ova tvrdnja će malo kasnije biti iskazana kao teorem u nešto općenitijem obliku.

Ako koristimo točnu vrijednost za start iteracija: $z_0 = y(0)$, onda je $e_0 = 0$ i ocjena je malo jednostavnija

$$|e_n| \leq \frac{e^{bL} - 1}{2L} h \|y''\|_\infty .$$

Točnost metode je definirana s h u ocjeni:

$$|e_n| \leq \frac{e^{bL} - 1}{2L} h \|y''\|_\infty.$$

Točnost definira pogreška odsjecanja:

$$\tau_n = \frac{T_n}{h}.$$

Kako možemo dobiti točniju metodu?

Eulerovu metodu smo dobili korištenjem:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2) = y(x) + hf(x, y(x)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Možemo koristiti više članova u razvoju, npr.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \mathcal{O}(h^3) = ?.$$

$$y(x+h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \mathcal{O}(h^3) = ?.$$

Rješenje diferencijalne jednačbe zadovoljava

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Što je s y'' ?

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) y'(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) f(x, y(x)) \\ &= f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Metoda:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)].$$

Ovaj pristup se naziva **Taylorova metoda**.

Nepraktično jer analitički računati parcijalne derivacije. Metoda se ne koristi u praksi.

Implicitna Eulerova metoda

U Eulerovoj metodi

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

smo iskoristili Taylorov razvoj

$$y(x+h) = y(x) + h y'(x) + \mathcal{O}(h^2).$$

Moguće je promatrati i razvoj

$$y(x-h) = y(x) - h y'(x) + \mathcal{O}(h^2).$$

Ovime dobijamo metodu

$$y_{i-1} = y_i - h f(x_i, y_i)$$

odnosno

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_{i+1})$$

Nova aproksimacija y_{i+1} je rješenje nelinearne jednačbe

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_{i+1}).$$

Jer je y_{i+1} zadan implicitno, govorimo o **implicitnoj** metodi.

Ova se metoda naziva **implicitna Eulerova metoda**.

U Eulerovoj metodi

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

je y_{i+1} zadan eksplicitno pa govorimo o **eksplicitnoj** metodi.

Pitanja:

- Postoji li uvijek rješenje ove jednačbe?
- Ako postoji rješenje, kojom metodom ga odrediti?
- Zašto koristiti metodu koja je (vjerojatno) jednako točna kao Eulerova metoda ali je znatno složenija?

Jednokoračne metode

Koristeći sličnu ideju kao u Eulerovoj metodi, diferencijalnu jednačbu

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0$$

na intervalu $[a, b]$, možemo rješavati tako da podijelimo interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala, označivši

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_i = a + i h, \quad i = 0, \dots, n.$$

y_{i+1} , aproksimaciju rješenja u točki x_{i+1} , računamo iz y_i korištenjem aproksimacije oblika

$$y(x + h) \approx y(x) + h \Phi(x, y(x), h; f),$$

te dobivamo rekurziju:

$$y_{i+1} = y_i + h \Phi(x_i, y_i, h; f), \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

Funkciju Φ nazivamo **funkcija prirasta**, a različiti izbor te funkcije definira različite metode.

Uočimo da je funkcija f iz diferencijalne jednačine parametar od Φ (tj. Φ zavisi o f).

Tako je npr. u Eulerovoj metodi

$$\Phi(x, y, h; f) = f(x, y).$$

Metode ovog oblika zovemo **jednokoračne metode**

(jer za aproksimaciju y_{i+1} koristimo samo vrijednost y_i u prethodnoj tački x_i , tj. u jednom koraku dobijemo y_{i+1} iz y_i).

Da bismo pojednostavili zapis, ubuduće ćemo f izostaviti kao argument funkcije Φ .

O odabiru funkcije Φ ovisi i točnost metode.

Pogrešku aproksimacije:

$$\tau(x; h) = \Delta(x; h) - \Phi(x, y(x), h),$$

gdje je $y(x)$ točno rješenje diferencijalne jednačbe

$$\Delta(x; h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

nazivamo **lokalna pogreška diskretizacije**.

Red metode odgovara njezinoj točnosti.

Općenito, za jednokoračne metode kažemo da su **reda** p ako je

$$\tau(x; h) = \mathcal{O}(h^p).$$

Što je veći p metoda je točnija, a to postizemo odabirom funkcije Φ .

Pod tačnošću metode podrazumijevamo ponašanje pogreške

$$y(x_i) - y_i.$$

Da bismo pojednostavnili argumentaciju, promatrat ćemo pogrešku u fiksiranoj točki b .

Ako je jednokoračna metoda reda p , tada je

$$y(b) - y_n = \mathcal{O}(h^p).$$

Napomena. Ovo će biti pokazano kasnije.

Uočimo da je $h = (b - a)/n$ te da je y_n uvijek (za svaki n) aproksimacija za $y(b)$.

Runge–Kuttine metode

Najpoznatije jednokoračne metode su svakako Runge–Kuttine metode.

Kod njih je funkcija Φ oblika

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{j=1}^r \omega_j k_j(x, y, h),$$

a k_j su zadani s

$$k_j(x, y, h) = f\left(x + c_j h, y + h \sum_{l=1}^r a_{jl} k_l(x, y, h, f)\right), \quad j = 1, \dots, r.$$

Broj r zovemo **broj stadija** Runge–Kuttine (RK) metode, i on označava koliko puta moramo računati funkciju f u svakom koraku.

Različit izbor koeficijenata ω_j , c_j i a_{jl} definira različite metode.

Iz izraza

$$k_j(x, y, h) = f\left(x + c_j h, y + h \sum_{l=1}^r a_{jl} k_l(x, y, h, f)\right), \quad j = 1, \dots, r.$$

vidimo da se k_j nalazi na lijevoj i na desnoj strani jednačbe.

Zadan je implicitno te govorimo o **implicitnoj** Runge–Kuttinoj metodi.

U praksi se najviše koriste metode gdje je

$$a_{jl} = 0 \quad \text{za} \quad l \geq j.$$

Tada k_j možemo izračunati preko k_1, \dots, k_{j-1} , tj. funkcije k_j su zadane eksplicitno.

Takve RK metode nazivamo **eksplicitnima**.

Nadalje, obično se dodaje uvjet

$$\sum_{l=1}^r a_{jl} = c_j.$$

Ovaj izvor koeficijenata c_j će biti objašnjen kasnije.

Primjer odabira koeficijenata prikazat ćemo na RK metodi s dva stadija:

$$\Phi(x, y, h) = \omega_1 k_1(x, y, h) + \omega_2 k_2(x, y, h),$$

$$k_1(x, y, h) = f(x, y),$$

$$k_2(x, y, h) = f(x + ah, y + ahk_1).$$

Razvojem k_2 u Taylorov red po varijabli h dobivamo

$$k_2(x, y, h) = f + h(f_x a + f_y a f) + \\ + \frac{h^2}{2}(f_{xx} a^2 + 2f_{xy} a^2 f + f_{yy} a^2 f^2) + \mathcal{O}(h^3),$$

- f_x i f_y prve parcijalne derivacije funkcije $f = f(x, y)$ po x i y ,
- f_{xx} , f_{xy} i f_{yy} odgovarajuće druge parcijalne derivacije.

Razvoj rješenja diferencijalne jednadžbe $y(x)$ ima oblik

$$\begin{aligned}y(x+h) &= y(x) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) \\ &\quad + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)] + \mathcal{O}(h^4).\end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili da je $y(x)$ rješenja diferencijalne jednadžbe:

$$y'(x) = f(x, y) = f,$$

te pravila za deriviranje

$$\begin{aligned}y''(x) &= f_x + f_y f, \\ y'''(x) &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f).\end{aligned}$$

Sada je lokalna pogreška diskretizacije jednaka

$$\begin{aligned}
 & \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h) = \\
 = & \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - (\omega_1 k_1(x, y, h) + \omega_2 k_2(x, y, h)) \\
 = & (1 - \omega_1 - \omega_2)f + h(f_x + f_y f) \left(\frac{1}{2} - \omega_2 a \right) \\
 & + h^2 \left[(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_2 a^2}{2} \right) + \frac{1}{6} f_y (f_x + f_y f) \right] \\
 & + \mathcal{O}(h^3).
 \end{aligned}$$

Da bi metoda bila reda 1 koeficijente treba odabrati tako da se poništi prvi član u gornjem razvoju:

$$1 - \omega_1 - \omega_2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h) = \\
& = (1 - \omega_1 - \omega_2)f + h(f_x + f_y f) \left(\frac{1}{2} - \omega_2 a \right) \\
& \quad + h^2 \left[(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_2 a^2}{2} \right) + \frac{1}{6} f_y (f_x + f_y f) \right] \\
& \quad + \mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}$$

Ukoliko je zadovoljeno i

$$\frac{1}{2} - \omega_2 a = 0$$

metoda će biti reda 2.

Uvođenjem slobodnog koeficijenta t rješenje ove dvije jednačbe možemo napisati u obliku:

$$\omega_2 = t \neq 0, \quad \omega_1 = 1 - t, \quad a = \frac{1}{2t}.$$

Uočimo da t ne možemo odabrati tako da poništimo i član uz h^2 tako da metoda bude reda 3.

Ukoliko je $\omega_2 = 0$, radi se o metodi s jednim stadijem, i to upravo o Eulerovoj metodi.

Za $t = 1/2$ dobivamo Heunovu metodu:

$$\Phi = \frac{1}{2} (k_1 + k_2),$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f(x + h, y + h k_1).$$

Za $t = 1$ dobiva se modificirana Eulerova metoda:

$$\Phi = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right).$$

lii

$$\Phi = k_2,$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right).$$

Najraširenije su metode sa četiri stadija.

Odgovarajuće jednadžbe koje moraju zadovoljavati koeficijenti RK-4 metoda su:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1,$$

$$\omega_2 c_2 + \omega_3 c_3 + \omega_4 c_4 = \frac{1}{2},$$

$$\omega_2 c_2^2 + \omega_3 c_3^2 + \omega_4 c_4^2 = \frac{1}{3},$$

$$\omega_3 c_2 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) = \frac{1}{6},$$

$$\omega_2 c_2^3 + \omega_3 c_3^3 + \omega_4 c_4^3 = \frac{1}{4},$$

$$\omega_3 c_2^2 a_{32} + \omega_4 (c_2^2 a_{42} + c_3^2 a_{43}) = \frac{1}{12},$$

$$\omega_3 c_2 c_3 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) c_4 = \frac{1}{8},$$

$$\omega_4 c_2 a_{32} a_{43} = \frac{1}{24},$$

gdje je

$$c_1 = 0,$$

$$c_3 = a_{31} + a_{32},$$

$$c_2 = a_{21},$$

$$c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43}.$$

- 1. uvjet treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 1
- 2. uvjet treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 2
- 3.-4. uvjet treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 3
- 5.-8. uvjet treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 4

Za metodu s tri stadija uvrštavanjem

$$c_4 = a_{41} = a_{42} = a_{43} = \omega_4 = 0$$

dobivamo 9 koeficijenata i 7 jednažbi.

Metoda s četiri stadija može postići najviše red četiri.

Ne možemo dva stupnja slobode iz sustava jednažbi iskoristiti da red metode podignemo na pet. Za eksplicitne metode vrijedi:

- za metode s jednim, dva, tri i četiri stadija najveći mogući red metode odgovara broju stadija.
- Za metode s 5, 6 i 7 stadija najveći mogući red je 4, 5 i 6.
- Za metode s 8 i 9 stadija najveći mogući red je 6 i 7.
- Za metode s 10 i više stadija najveći mogući red je barem za dva manji od broja stadija.

Metode s četiri stadija su najpopularnije. Red je 4, a da bismo postigli red 5 trebamo povećati broj stadija barem za dva.

Primjeri RK-4 metoda.

Najpopularnija je “klasična” Runge–Kutta metoda, koja se u literaturi najčešće naziva Runge–Kutta ili RK-4 metoda (iako je to samo jedna u nizu Runge–Kutta metoda):

$$\Phi = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(x + h, y + hk_3\right).$$

3/8-sku metoda:

$$\Phi = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{2}{3}h, y - \frac{h}{3}k_1 + hk_2\right),$$

$$k_4 = f(x + h, y + h(k_1 - k_2 + k_3))$$

Gillova metoda:

$$\Phi = \frac{1}{6} \left(k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4 \right),$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + h \frac{\sqrt{2}-1}{2} k_1 + h \frac{2-\sqrt{2}}{2} k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(x + h, y - h \frac{\sqrt{2}}{2} k_2 + h \frac{2+\sqrt{2}}{2} k_3\right).$$

Butcherova tablica

Koeficijente RK metode uobičajeno je zapisivati pomoću Butcherove tablice:

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	\cdots	a_{2s}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	\cdots	a_{3s}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	a_{ss}
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_s

“Klasična” Runge–Kutta metoda:

0					
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$		
1		0	0	1	
		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Još o koeficijentima za Runge–Kuttine metode

Za RK-2 i RK-4 metode smo vidjeli da treba vrijediti

$$\sum_j \omega_j = 1$$

da bi bile konzistentne s redom većim od 1.

To vrijedi i općenito za sve RK metode.

Teorem

Runge–Kuttina metoda sa s stadija ima red konzistencije veći ili jednak 1 ako i samo ako je

$$\sum_{j=1}^s \omega_j = 1.$$

Dokaz.

Teorem srednje vrijednosti daje nam ocjene

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

i

$$k_j = f\left(x + c_j h, y + h \sum_l a_{jl} k_l\right) = f(x, y) + \mathcal{O}(h),$$

pa lokalna pogreška diskretizacije

$$\tau(x; h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \sum_j \omega_j k_j$$

zadovoljava

$$\tau(x; h) = y'(x) + \mathcal{O}(h) - \sum_j \omega_j [f(x, y) + \mathcal{O}(h)].$$

y je rješenje diferencijalne jednačbe $y' = f(x, y)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}\tau(x; h) &= f(x, y) - \sum_j \omega_j f(x, y) + \mathcal{O}(h) \\ &= f(x, y) \left(1 - \sum_j \omega_j \right) + \mathcal{O}(h),\end{aligned}$$

odakle lagano slijedi tvrdnja teorema. □

Slijedeća zanimljivost vezana je uz određivanje koeficijenata c_j .

U definiciji metode je spomenuto da je uobičajeni izbor

$$c_j = \sum_l a_{jl}.$$

Možemo li povećati red konzistencije drugačijim izborom c_j .

Odgovor je ne, i to nam pokazuje sljedeći teorem.

Teorem

Neka je RK metoda zadana s

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s \omega_j \tilde{k}_j, \quad \tilde{k}_j = f\left(x + \tilde{c}_j, y + h \sum_{l=1}^s a_{jl} \tilde{k}_l\right)$$

reda konzistencije \tilde{p} , te neka je p red konzistencije metode

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s \omega_j k_j, \quad k_j = f\left(x + c_j, y + h \sum_{l=1}^s a_{jl} k_l\right),$$

gdje je $c_j = \sum_{l=1}^s a_{jl}$. Tada je $p \geq \tilde{p}$.

Konvergenција jednokoračnih metoda

U daljnjem tekstu pretpostaviti ćemo da je $f \in F_1(a, b)$.

S y ćemo označiti egzaktno rješenje inicijalnog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a, b], \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da pretpostavka $f \in F_1(a, b)$ povlači egzistenciju i jedinstvenost rješenja y na intervalu $[a, b]$.

Neka $\Phi(x, y; h)$ definira jednokoračnu metodu

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i; h), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

gdje je $x_{i+1} = x_i + h$.

Zanima nas ponašanje pogreške

$$e_i = y_i - y(x_i).$$

Za fiksirani $x \in [a, b]$ definiramo korak

$$h_n = \frac{x - x_0}{n}$$

i **globalnu pogrešku diskretizacije**

$$e(x; h_n) = y_n - y(x).$$

Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n = x$, te možemo promatrati globalnu pogrešku diskretizacije kada $n \rightarrow \infty$.

Definicija

Jednokoračna metoda je **konvergentna** ako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(x; h_n) = 0$$

za sve $x \in [a, b]$ i sve $f \in F_1(a, b)$.

Pokazat ćemo da su metode reda $p > 0$ konvergentne, i štoviše, da vrijedi

$$e(x; h_n) = \mathcal{O}(h_n^p).$$

Red globalne pogreške diskretizacije je dakle jednak redu lokalne pogreške diskretizacije.

Lema

Ako brojevi ξ_i zadovoljavaju ocjenu oblika

$$|\xi_{i+1}| \leq (1 + \delta)|\xi_i| + B, \quad \delta > 0, \quad B \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

tada je

$$|\xi_n| \leq e^{n\delta} |\xi_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B.$$

Dokaz.

Iz pretpostavke direktno slijedi

$$|\xi_1| \leq (1 + \delta)|\xi_0| + B,$$

$$|\xi_2| \leq (1 + \delta)^2|\xi_0| + B(1 + \delta) + B,$$

⋮

$$|\xi_n| \leq (1 + \delta)^n|\xi_0| + B[1 + (1 + \delta) + (1 + \delta)^2 + \cdots + (1 + \delta)^{n-1}]$$

$$= (1 + \delta)^n|\xi_0| + B\frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta}$$

$$\leq e^{n\delta}|\xi_0| + B\frac{e^{n\delta} - 1}{\delta},$$

jer je $0 < 1 + \delta < e^\delta$ za $\delta > -1$.

Teorem

Za $x_0 \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}$, *promatramo inicijalni problem*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

koji ima jedinstveno rješenje $y(x)$. Neka je funkcija Φ neprekidna na

$$G = \{(x, y, h) \mid x \in [a, b], |y - y(x)| \leq \gamma, |h| \leq h_0\},$$

za $h_0 > 0$, $\gamma > 0$ i neka postoje pozitivne konstante M i N takve da je

$$|\Phi(x, y_1; h) - \Phi(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|$$

za sve $(x, y_i, h) \in G$, $i = 1, 2$,

$$|\tau(x; h)| = |\Delta(x; h) - \Phi(x, y(x); h)| \leq N|h|^p, \quad p > 0$$

za sve $x \in [a, b]$, $h \leq h_0$.

Tada postoji \bar{h} , $0 < \bar{h} \leq h_0$, takav da globalna pogreška diskretizacije zadovoljava

$$|e(x; h_n)| \leq |h_n|^p N \frac{e^{M|x-x_0|} - 1}{M}$$

za sve $x \in [a, b]$ i $h_n = (x - x_0)/n$, $n = 1, 2, \dots$, uz $|h_n| \leq \bar{h}$. Ako je $\gamma = \infty$, tada je $\bar{h} = h_0$.

Dokaz. Funkcija

$$\tilde{\Phi}(x, y; h) = \begin{cases} \Phi(x, y; h), & \text{za } (x, y, h) \in G, \\ \Phi(x, y(x) + \gamma; h), & \text{za } x \in [a, b], |h| \leq h_0, y \geq y(x) + \gamma, \\ \Phi(x, y(x) - \gamma; h), & \text{za } x \in [a, b], |h| \leq h_0, y \leq y(x) - \gamma \end{cases}$$

je očito neprekidna na

$$\tilde{G} = \{(x, y, h) \mid x \in [a, b], y \in \mathbb{R}, |h| \leq h_0\}$$

i zadovoljava uvjet

$$|\tilde{\Phi}(x, y_1; h) - \tilde{\Phi}(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|$$

za sve $(x, y_i, h) \in \tilde{G}$, $i = 1, 2$.

Zbog $\tilde{\Phi}(x, y(x); h) = \Phi(x, y(x); h)$ također vrijedi

$$|\Delta(x; h) - \tilde{\Phi}(x, y(x); h)| \leq N|h|^p, \quad \text{za } x \in [a, b], \quad |h| \leq h_0.$$

Neka jednokoračna metoda generirana s $\tilde{\Phi}$ definira aproksimacije \tilde{y}_i za $y(x_i)$, $x_i = x_0 + ih$:

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h\tilde{\Phi}(x_i, \tilde{y}_i; h).$$

Zbog

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\Delta(x_i; h),$$

za pogrešku $\tilde{e}_i = \tilde{y}_i - y(x_i)$, oduzimanjem, dobivamo rekurzivnu formulu

$$\tilde{e}_{i+1} = \tilde{e}_i + h[\tilde{\Phi}(x_i, \tilde{y}_i; h) - \tilde{\Phi}(x_i, y(x_i); h)] + h[\tilde{\Phi}(x_i, y(x_i); h) - \Delta(x_i; h)].$$

Sada slijedi

$$|\tilde{\Phi}(x_i, \tilde{y}_i; h) - \tilde{\Phi}(x_i, y(x_i); h)| \leq M|\tilde{y}_i - y(x_i)| = M|\tilde{e}_i|,$$

$$|\tilde{\Phi}(x_i, y(x_i); h) - \Delta(x_i; h)| \leq N|h|^p,$$

te dobivamo rekurzivnu ocjenu

$$|\tilde{e}_{i+1}| \leq (1 + |h|M)|\tilde{e}_i| + N|h|^{p+1}.$$

Korištenjem $\tilde{e}_0 = \tilde{y}_0 - y(x_0) = 0$, iz leme slijedi

$$|\tilde{e}_k| \leq N|h|^p \frac{e^{M|x_k - x_0|} - 1}{M}.$$

Neka je sada $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, fiksiran i $h = h_n = (x - x_0)/n$, $n > 0$.

Tada zbog $x_n = x_0 + nh = x$ i zbog $\tilde{e}(x; h_n) = \tilde{e}_n$ slijedi

$$|\tilde{e}(x; h_n)| \leq N|h|^p \frac{e^{M|x - x_0|} - 1}{M}$$

za sve $x \in [a, b]$ i h_n za koje je $|h_n| \leq h_0$.

Budući da je $|x - x_0| \leq |b - a|$ i $\gamma > 0$, postoji \bar{h} , $0 < \bar{h} \leq h_0$ takav da je $|\tilde{e}(x; h_n)| \leq \gamma$ za sve $x \in [a, b]$, $|h_n| \leq \bar{h}$, tj. za jednokoračnu metodu generiranu s Φ :

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i; h)$$

imamo za $|h| \leq \bar{h}$, zbog definicije za $\tilde{\Phi}$,

$$\tilde{y}_i = y_i, \quad \tilde{e}_i = e_i \quad \text{i} \quad \tilde{\Phi}(x_i, \tilde{y}_i; h) = \Phi(x_i, y_i; h).$$

Tvrđnja teorema dakle slijedi za sve $x \in [a, b]$ i sve $h_n = (x - x_0)/n$, $n = 1, 2, \dots$, uz $|h_n| \leq \bar{h}$. □

Iz prethodnog teorema posebno slijedi da je metoda reda $p > 0$, koja u okolini rješenja zadovoljava Lipschitzov uvjet, konvergentna.

Uočimo da je ovaj uvjet ispunjen ako $\frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y; h)$ postoji i neprekidna je u domeni G danoj u teoremu.

Teorem, također, daje i gornju ogradu za globalnu pogrešku diskretizacije, koja u principu može biti izračunata ako znamo M i N .

To je u praksi nepraktično. Tako je za Eulerovu metodu

$$N \approx \frac{1}{2} |f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))f(x, y(x))|$$

i

$$M \approx \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = |f_y(x, y(x))|,$$

dok za RK-4 metode treba ocijeniti četvrte derivacije funkcije f .

Druga varijanta teorema o konvergenciji.

Teorem

Pretpostavimo da jednokoračna metoda zadovoljava Lipschitzov uvjet

$$|\Phi(x, y_1; h) - \Phi(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|$$

za sve $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ i $x \in [a, b]$.

Tada rješenje $y(x)$ inicijalnog problema $y' = f(x, y)$ i niz aproksimacija (y_i) dobivenih jednokoračnom metodom zadovoljavaju

$$\max_{0 \leq i \leq n} |y(x_i) - y_i| \leq e^{b-x_0} L |y(x_0) - y_0| + \left[\frac{e^{(b-x_0)L} - 1}{L} \right] \tau(h)$$

gdje je

$$\tau(h) = \max_i |\tau(x_i; h)|.$$

Ako je metoda konzistentna tada numeričko aproksimacija y_n konvergira prema $y(b)$.

Obratimo pažnju na član $|y(x_0) - y_0|$:

$$\max_{0 \leq i \leq n} |y(x_i) - y_i| \leq e^{b-x_0} L |y(x_0) - y_0| + \left[\frac{e^{(b-x_0)L} - 1}{L} \right] \tau(h)$$

Nije nužno da iteracije započnemo s $y(x_0)$!

Ako napravimo malu perturbaciju na početku $y_0 = y(x_0) + \varepsilon$ ta pogreška se ograničeno širi bez obzira na n (ili h)!

Ovaj teorem zapravo kaže da su jednokoračne metode **stabilne**.

Konvergencija Runge-Kuttinih metoda

Konvergencija jednokoračnih metoda je garantirana zadovoljavanjem Lipschitzovog uvjeta:

$$|\Phi(x, y_1; h) - \Phi(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|.$$

Ako f zadovoljava Lipschitzov uvjet:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

Zadovoljava li ga i $\Phi = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \dots + \omega_s k_s$ iz RK metode?

Pogledajmo **eksplicitnu** RK metodu sa s stadija:

$$k_1(y) = f(x, y)$$

$$k_2(y) = f(x + c_2 h, y + h a_{21} k_1(y))$$

$$k_3(y) = f(x + c_3 h, y + h(a_{31} k_1(y) + a_{32} k_2(y)))$$

$$\vdots$$

$$k_s(y) = f(x + c_s h, y + h(a_{s1} k_1(y) + a_{s2} k_2(y) + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}(y)))$$

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^s \omega_i k_i(y)$$

Promatramo

$$\begin{aligned}
 |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| &= \left| \sum_{i=1}^s \omega_i (k_i(y_1) - k_i(y_2)) \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^s |\omega_i| |k_i(y_1) - k_i(y_2)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |k_1(y_1) - k_1(y_2)| &= |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \\
 &\leq L|y_1 - y_2|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |k_2(y_1) - k_2(y_2)| &= |f(x + c_2 h, y_1 + h a_{21} k_1(y_1)) - \\
 &\quad - f(x + c_2 h, y_2 + h a_{21} k_1(y_2))| \\
 &\leq L|y_1 + h a_{21} k_1(y_1) - y_2 - h a_{21} k_1(y_2)|
 \end{aligned}$$

$$\leq L(|y_1 - y_2| + h|a_{21}||k_1(y_1) - k_1(y_2)|)$$

$$\leq L(|y_1 - y_2| + h|a_{21}|L|y_1 - y_2|)$$

$$= L(1 + hL|a_{21}|)|y_1 - y_2| = L_2|y_1 - y_2|$$

$$|k_3(y_1) - k_3(y_2)| = |f(x + c_3h, y_1 + ha_{31}k_1(y_1) + a_{32}k_2(y_1)) - f(x + c_3h, y_2 + ha_{31}k_1(y_2) + a_{32}k_2(y_2))|$$

$$\leq L|y_1 + ha_{31}k_1(y_1) + a_{32}k_2(y_1) - y_2 - ha_{31}k_1(y_2) - a_{32}k_2(y_2)|$$

$$\leq L(|y_1 - y_2| + h|a_{31}||k_1(y_1) - k_1(y_2)|$$

$$+ h|a_{32}||k_2(y_1) - k_2(y_2)|) \leq \dots \leq L_3|y_1 - y_2|$$

Indukcijom slijedi:

$$\begin{aligned}
 & |k_i(y_1) - k_i(y_2)| = \\
 & = |f(x + c_i h, y_1 + h(a_{i1}k_1(y_1) + a_{i2}k_2(y_1) + \dots + a_{i,i-1}k_{i-1}(y_1))) - \\
 & \quad - f(x + c_i h, y_2 + h(a_{i1}k_1(y_2) + a_{i2}k_2(y_2) + \dots + a_{i,i-1}k_{i-1}(y_2))))| \\
 & \leq \dots \\
 & \leq L_i |y_1 - y_2|
 \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
 |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| & \leq \sum_{i=1}^s |\omega_i| |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \\
 & \leq \sum_{i=1}^s |\omega_i| L_i |y_1 - y_2| = M |y_1 - y_2|
 \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali:

Teorem

Ako f zadovoljava Lipschitzov uvjet onda i eksplicitna Runge-Kuttina metoda zadovoljava Lipschitzov uvjet.

- Što s implicitnim metodama?
- Do sada su spomenute samo eksplicitne.
- Implicitne metode su kompliciranije. Treba rješavati nelinearni sustav!
- Postoji li rješenje?
- Zašto koristiti kompliciraniju metodu?
- Kruti (stiff) problemi i A-stabilnost.
- Nekoliko rezultata o egzistenciji rješenja i konvergenciji.

Teorem

Neka f zadovoljava Lipschitzov uvjet:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

i neka je $a = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Tada za $h < 1/(La)$ sustav jednačbi

$$k_i = f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right), \quad i = 1, \dots, s$$

ima jedinstveno rješenje a niz generiran s

$$k_i^{(n+1)} = f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^{(n)}\right), \quad i = 1, \dots, s$$

konvergira prema tom rješenju.

Dokaz. Sustav možemo zapisati kao

$$\mathbf{k} = F(\mathbf{k}).$$

Pokazat ćemo da je F kontrakcija.

$$\begin{aligned} |(F(\mathbf{k}^1) - F(\mathbf{k}^2))_i| &= \left| f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^1\right) \right. \\ &\quad \left. - f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^2\right) \right| \\ &\leq Lh \left| \sum_{j=1}^s a_{ij} (k_j^1 - k_j^2) \right| \leq Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| |k_j^1 - k_j^2| \\ &\leq Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| \|k_j^1 - k_j^2\|_\infty \leq Lha \|k_j^1 - k_j^2\|_\infty \end{aligned}$$

Dakle,

$$\| (F(\mathbf{k}^1) - F(\mathbf{k}^2)) \|_{\infty} \leq Lha \| k_j^1 - k_j^2 \|_{\infty}$$

gdje je $Lha < 1$.

\Rightarrow uz $F(\mathbb{R}^s) \subset \mathbb{R}^s$, F je kontrakcija.

\Rightarrow postoji jedinstvena fiksna točka $\mathbf{k} = F(\mathbf{k})$ i jednostavne iteracije

$$\mathbf{k}^{(n+1)} = F(\mathbf{k}^{(n)})$$

konvergiraju prema njoj.



Još je ostalo pitanje konvergencije implicitnih RK metoda.

Teorem

Ako f zadovoljava Lipshitzov uvjet

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

i neka za $a = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ vrijedi $h < 1/(La)$, tada i RK metoda zadovoljava Lipshitzov uvjet.

Dokaz.

$$k_i(y) = f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j(y)\right), \quad i = 1, \dots, s$$

$$\begin{aligned} |k_i(y_1) - k_i(y_2)| &= \left| f\left(x + c_i, y_1 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j(y_1)\right) - \right. \\ &\quad \left. - f\left(x + c_i, y_2 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j(y_2)\right) \right| \\ &\leq L \left| y_1 - y_2 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} (k_j(y_1) - k_j(y_2)) \right| \\ &\leq L |y_1 - y_2| + Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| |k_j(y_1) - k_j(y_2)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |k_i(y_1) - k_i(y_2)| &\leq L|y_1 - y_2| + Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| |k_j(y_1) - k_j(y_2)| \\ &\leq L|y_1 - y_2| + Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| \max_j |k_j(y_1) - k_j(y_2)| \\ &\leq L|y_1 - y_2| + Lha \max_j |k_j(y_1) - k_j(y_2)| \end{aligned}$$

Sada je

$$\max_i |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| + Lha \max_j |k_j(y_1) - k_j(y_2)|$$

odnosno ($Lha < 1$)

$$\max_i |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \leq \frac{L}{1 - Lha} |y_1 - y_2|.$$

RK metoda sada zadovoljava

$$\begin{aligned} |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| &= \left| \sum_i \omega_i (k_i(y_1) - k_i(y_2)) \right| \\ &\leq \sum_i |\omega_i| |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \\ &\leq \sum_i |\omega_i| \max_i |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \\ &\leq \sum_i |\omega_i| \frac{L}{1 - Lha} |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$



Apsolutna stabilnost

Krute jednačbe

Primjer. Rješenje inicijalnog problema

$$y' = -2yx, \quad y(0) = 1$$

je $y(x) = e^{-x^2}$.

Uočimo da je

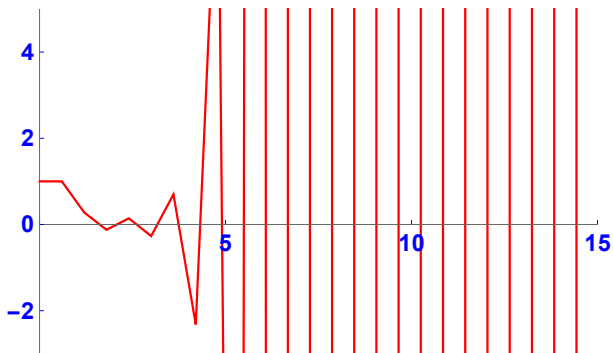
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

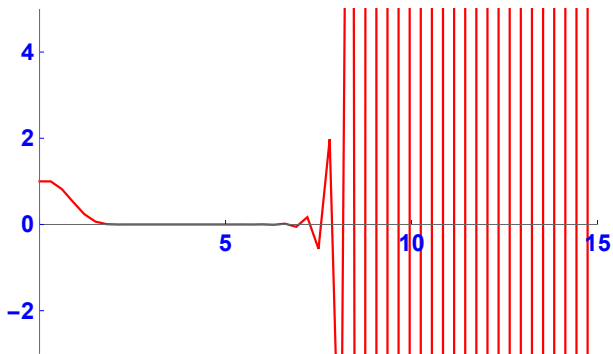
Isto svojstvo očekujemo i od numeričke aproksimacije.

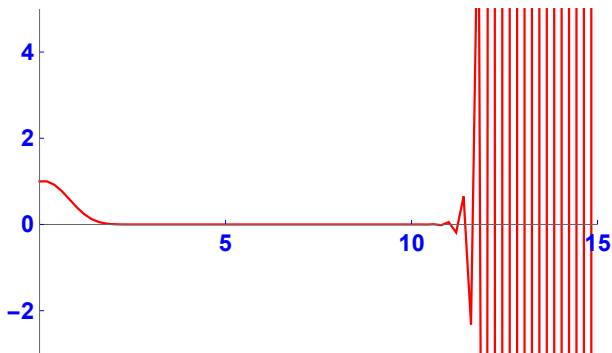
Obratite pažnju na Lipschitzov uvjet:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = 2|x||y_1 - y_2|.$$

Za veliki x i L je velik.

Eulerova metoda $n = 25$ 

Eulerova metoda $n = 50$ 

Eulerova metoda $n = 75$ 

U ovom primjeru:

- povećanjem n -a metoda je sve točnija.
- To je u skladu s konvergentnošću metode.
- U jednom trenutku pogreška 'eksplodira'.
- Pogreška naglo poraste iako je funkcija 'pitoma' (e^{-x^2})

Cilj nam je objasniti ovakvo ponašanje. I eventualno riješiti problem.

Apsolutna stabilnost Eulerove metode

Da bismo bolje razumjeli uzrok ovakve nestabilnosti, razmotrimo jednostavniji problem: primjena Eulerove metode na inicijalni problem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0,$$

gdje je λ konstanta.

Za Eulerovu metodu je

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda)y_i.$$

Zbog toga imamo

$$y_0 = y_0 \quad (\text{inicijalni uvjet})$$

$$y_1 = (1 + h\lambda)y_0$$

$$y_2 = (1 + h\lambda)y_1 = (1 + h\lambda)^2 y_0$$

.....

$$y_i = (1 + h\lambda)y_{i-1} = (1 + h\lambda)^i y_0$$

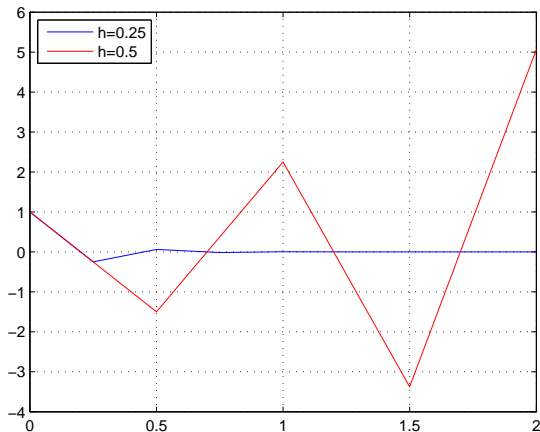
Kada je $\lambda < 0$, egzaktno rješenje $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ zadovoljava $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$.

- Aproksimacija rješenja dobivena Eulerovom metodom $y_i = (1 + \lambda h)^i y_0$ također se približava ka $y = 0$ samo ako je $|1 + \lambda h| < 1$, tj. $\lambda h \in \langle -2, 0 \rangle$.
- Kada je $1 + \lambda h < -1$, aproksimacija će ispoljiti rastuće oscilacije oko $y = 0$.

Sljedeća slika prikazuje aproksimacije rješenja dobivene Eulerovom metodom inicijalnog problema

$$y' = -5y, \quad y(0) = 1$$

za $h = 0.25$ i $h = 0.5$.



$$\lambda h = -5 \cdot 0.25 = -1.25 \in \langle -2, 0 \rangle$$

$$\lambda h = -5 \cdot 0.5 = -2.5 \notin \langle -2, 0 \rangle$$

Interval apsolutne stabilnosti

Na temelju prethodnih razmatranja možemo dati sljedeću definiciju.

Definicija

Interval apsolutne stabilnosti numeričke metode je interval vrijednosti λh za koje se aproksimacija y_i rješenja $y(x_i) = y_0 e^{\lambda x_i}$ jednačbe $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$ približava nuli kada $i \rightarrow \infty$ (λ je svojstvena vrijednost matrice A).

Pristup se može i malo proširiti.

Ako promatramo sustav diferencijalnih jednačbi:

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0,$$

vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \quad \forall y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i.$$

Definicija

Područje apsolutne stabilnosti numeričke metode je područje vrijednosti λh za koje se aproksimacija y_i rješenja $y(x_i) = y_0 e^{Ax_i}$ jednadžbe $y' = Ay$, $y(0) = y_0$, približava nuli kada $i \rightarrow \infty$.

Primjer. Za Eulerovu metodu je uvjet stabilnosti bio

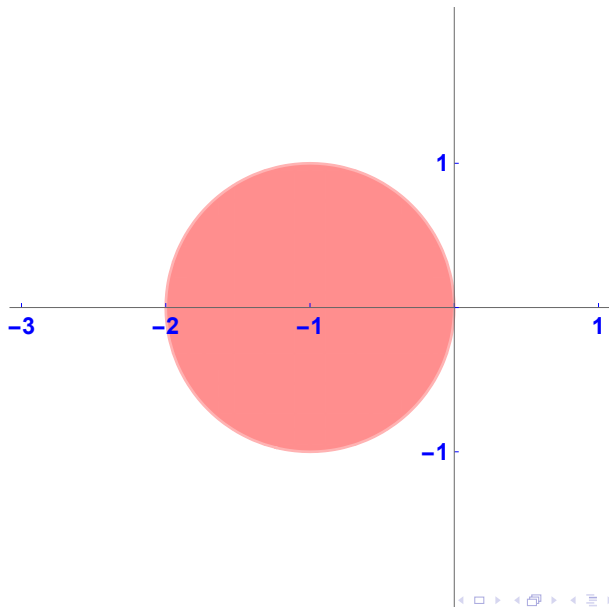
$$|1 + \lambda h| < 1$$

pa je područje stabilnosti

$$|1 + z| < 1,$$

krug radijusa 1 sa središtem u -1 .

Područje stabilnosti za Eulerovu metodu.



Kada se jednokoračna metoda primjeni na testni problem $y' = Ax$, korak je oblika:

$$y + h\Phi(x, y; h) = \varphi(Ah)y.$$

φ - **funkcija stabilnosti** (*stability function*)

Jer je

$$y_{i+1} = \varphi(Ah)y_i = \dots = \left(\varphi(Ah)\right)^{n+1} y_0,$$

uvjet stabilnosti je

$$\lim_i y_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\varphi(Ah)| < 1.$$

Područje apsolutne stabilnosti je skup:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\varphi(z)| < 1\}.$$

Definicija

Za jednokoračnu metodu kažemo da je **A-stabilna (apsolutno stabilna)** ako je funkcija stabilnosti φ pridružena funkciji prirasta Φ definirana na lijevoj strani kompleksne ravnine i zadovoljava

$$|\varphi(z)| < 1 \quad \text{za sve } z \text{ za koje je } \operatorname{Re} z < 0.$$

Ako je red metode p tada je

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y; h) = \mathcal{O}(h^p)$$

odnosno

$$y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y; h) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

U terminima funkcije stabilnosti uz $y(x+h) = y(x)e^{Ah}$:

$$\left[e^{Ah} - \varphi(Ah) \right] y(x) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Dakle, za metodu reda p je

$$e^z = \varphi(z) + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Ideja koncepta apsolutne stabilnosti je zahtjev da ako je diferencijalna jednadžba

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

stabilna:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0, \quad \forall y_0$$

tada i numerička aproksimacija treba zadovoljavati

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0.$$

Ukoliko je f Dahlquistova test funkcija Ay , diferencijalna jednadžba

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0$$

je stabilna ako i samo ako svojstvene vrijednosti λ zadovoljavaju

$$\operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Krute (*stiff*) jednačbe

- Ne postoji striktna definicija krute jednačbe.
- Ako jedna ili više svojstvenih vrijednosti matrice A iz $y' = Ay$ su negativne i $|\lambda| \gg 1$ i po veličini odskaku od ostalih svojstvenih vrijednosti.
- Ukoliko je $f(x, y)$ nelinearna funkcija, to se odnosi na Jacobijevu matricu.
- Svojstvena vrijednost $\lambda < 0$ i $|\lambda| \gg 1$ odgovara procesu koji se brzo prigušuje ($e^{-|\lambda|x}$).
- U numeričkoj metodi je brzina prigušavanja $|\varphi(\lambda h)|^i$.
- To može biti i rast, potpuno obrnuto ponašanje.
- U primjenama, $|\lambda|$ može biti iznimno velik.
- Veliki $|\lambda|$ zahtjeva mali korak h u metodi. Značajno usporava metodu iako je pripadno egzaktno rješenje 'dobro' (npr. $e^{-|\lambda|x}$).

Apsolutna stabilnost Runge–Kuttinih metoda

Područje apsolutne stabilnosti za Runge–Kutta metode može se naći na sličan način kao kod Eulerove metode.

Nađimo područje apsolutne stabilnosti za RK metodu sa 2 stadija: modificiranu Eulerovu metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))].$$

Kako je $f(x_i, y_i) = \lambda y_i$ imamo

$$y_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right) y_i.$$

Područje apsolutne stabilnosti:

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right| < 1 \quad \text{tj.} \quad \left|1 + z + \frac{1}{2}z^2\right| < 1.$$

Interval apsolutne stabilnosti ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$1 + z + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(z + 1)^2 + \frac{1}{2}$$

Gornji uvjet na z je ekvivalentan $|z + 1| < 1$.

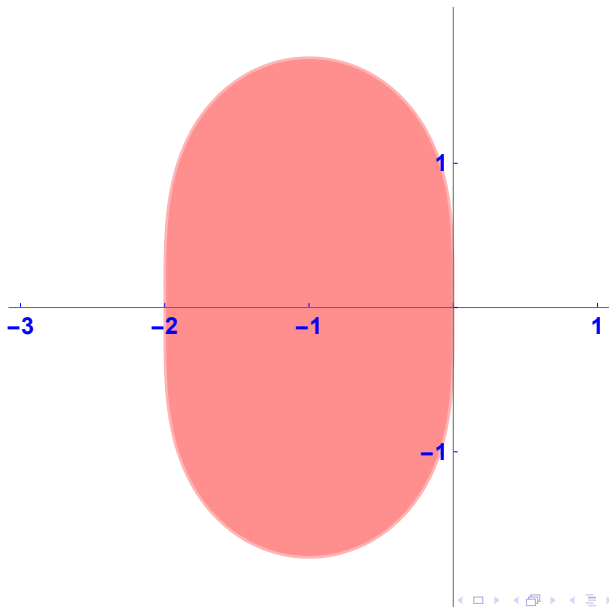
Interval apsolutne stabilnosti za modificiranu Eulerovu metodu jednak

$$\lambda h \in \langle -2, 0 \rangle,$$

kao i za Eulerovu metodu.

Područje apsolutne stabilnosti je ipak drugačije.

Područje apsolutne stabilnosti za modificiranu Eulerovu metodu.



Za metode iz primjera vidjeli smo:

Eulerova metoda: $\varphi(z) = 1 + z$

Modificirana Eulerova metoda: $\varphi(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2$

Teorem

Za eksplicitne Runge-Kuttine metode funkcija stabilnosti $\varphi(z)$ je polinom.

Dokaz. Jednostavnom indukcijom.

Teorem

Eksplicitne Runge-Kuttine metode nisu A-stabilne.

Dokaz. Funkcija stabilnosti $\varphi(z)$ je polinom.

Polinomi nisu ograničeni za $x \in \mathbb{R}$ i $x < 0$.

Pa ne mogu zadovoljiti

$$|\varphi(x)| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x < 0$$

pa to ne mogu zadovoljiti niti na \mathbb{C} za $\operatorname{Re} z < 0$. □

Pokazali smo da za metodu reda p funkcija stabilnosti zadovoljava

$$e^z = \varphi(z) + \mathcal{O}(h^{p+1}) = \varphi(z) + \mathcal{O}(z^{p+1})$$

Za eksplicitne RK metode φ je polinom.

$$\Rightarrow \varphi(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p} + \mathcal{O}(z^{p+1}).$$

Za metodu sa s stadija je $\partial\varphi = s$ (broj stadija).

\Rightarrow Ako je $s = p$, φ je Taylorov polinom eksponencijalne funkcije stupnja p .

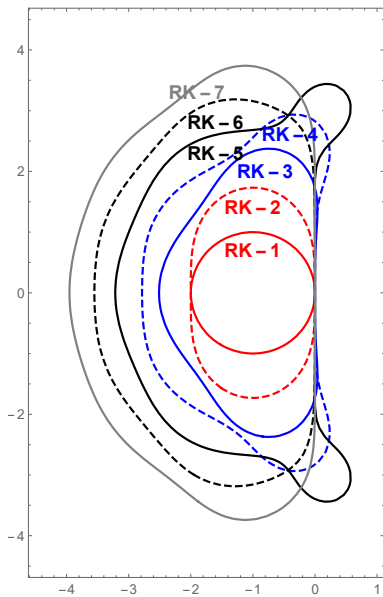
\Rightarrow Sve eksplicitne RK metode istog maksimalnog reda imaju istu funkciju stabilnosti.

Ovo je moguće samo za metode do 4 stadija.

Funkcija stabilnosti i intervali apsolutne stabilnosti

Red metode	$\varphi(z)$	Interval aps. stab.
1	$1 + z$	$\langle -2, 0 \rangle$
2	$1 + z + \frac{1}{2}z^2$	$\langle -2, 0 \rangle$
3	$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$	$\langle -2.51, 0 \rangle$
4	$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$	$\langle -2.78, 0 \rangle$

Područja apsolutne stabilnosti za eksplicitne Runge-Kuttine metode.



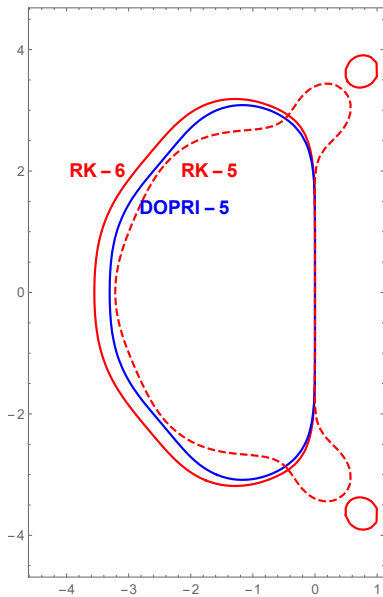
Područja za RK-5, 6 i 7 su ilustrativna.

Nacrtano je područje za $\varphi(z) = \sum_{i=0}^s \frac{z^i}{i!}$.

Npr. Dormand&Prince metoda, $s = 6$, $p = 5$:

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^5 \frac{z^i}{i!} + \frac{z^6}{600}$$

Područja apsolutne stabilnosti za Dormand&Prince metodu (DOPRI5).



Primjeri implicitnih Runge-Kuttinih metoda

Da bismo usporedili eksplicitne i implicitne RK metode trebamo nekoliko primjera implicitnih RK metoda.

Jedan način dobivanja numeričkih metoda za ODJ je primjena integracijskih metoda.

Diferencijalnu jednačbu

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

integriramo:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

i primijenimo neku integracijsku formulu:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx = \mathcal{I}_i = \sum_{j=1}^s w_j f(t_j, y(t_j)).$$

Korištenjem integracijskih metoda dobivamo:

- formula lijevog ruba \rightarrow Eulerova metoda

$$\mathcal{I}_i \approx h f(x_i, y(x_i))$$

- formula desnog ruba \rightarrow implicitna Eulerova metoda

$$\mathcal{I}_i \approx h f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

- formula srednje točke \rightarrow modificirana Eulerova metoda

$$\mathcal{I}_i \approx h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right),$$

pri čemu se koristi aproksimacija

$$y(x_i + h/2) \approx y(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i) = y(x_i) + \frac{h}{2} f(x_i, y(x_i)).$$

- trapezna formula \rightarrow Implicitna trapezna metoda ili Crank–Nicolsonova metoda

$$\mathcal{I}_i \approx \frac{h}{2}(f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))$$

Za izvod implicitnih RK metoda mogu se koristiti i Gaussove integracijske formule.

Butcherova tablica za Gaussovu metodu reda 2 (pravilo srednje točke)

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Butcherova tablica za Gaussovu metodu reda 4

$(3-\sqrt{3})/6$	$1/4$	$(3-2\sqrt{3})/12$
$(3+\sqrt{3})/6$	$(3+2\sqrt{3})/12$	$1/4$
	$1/2$	$1/2$

Butcherova tablica za Gaussovu metodu reda 6

$(5-\sqrt{15})/10$	$5/36$	$2/9 - \sqrt{15}/5$	$5/36 - \sqrt{15}/30$
$1/2$	$5/36 + \sqrt{15}/24$	$2/9$	$5/36 - \sqrt{15}/24$
$(5+\sqrt{15})/10$	$5/36 + \sqrt{15}/30$	$2/9 + \sqrt{15}/5$	$5/36$
	$5/18$	$4/9$	$5/18$

Butcherova tablica za Radauovu metodu reda 3

1/3	5/12	-1/12
1	3/4	1/4
	3/4	1/4

Butcherova tablica za Radauovu metodu reda 5

$(4-\sqrt{6})/10$	$(88-7\sqrt{6})/360$	$(296-169\sqrt{6})/1800$	$(-2+3\sqrt{6})/255$
$(4+\sqrt{6})/10$	$(296+169\sqrt{6})/1800$	$(88+7\sqrt{6})/360$	$(-2+3\sqrt{6})/255$
1	$(16-\sqrt{6})/36$	$(16+\sqrt{6})/36$	1/9
	$(16-\sqrt{6})/36$	$(16+\sqrt{6})/36$	1/9

Butcherova tablica za Lobattovu metodu reda 4

0	0	0	0
1/2	1/4	1/4	0
1	0	1	0
	1/6	2/3	1/6

Butcherova tablica za Lobattovu metodu reda 6

0	0	0	0	0
$(5-\sqrt{5})/10$	$(5+\sqrt{5})/60$	1/6	$(15-7\sqrt{5})/60$	0
$(5+\sqrt{5})/10$	$(5-\sqrt{5})/60$	$(15+7\sqrt{5})/60$	1/6	0
1	1/6	$(5-\sqrt{5})/12$	$(5+\sqrt{5})/12$	0
	1/12	5/12	5/12	1/12

Butcherova tablica za **eksplicitnu Runge-Kuttinu metodu (ERK)**

c_1	0						
c_2	a_{21}	0					
c_3	a_{31}	a_{32}	0				
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\ddots		
c_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	$a_{s-1,3}$	\cdots	$a_{s-1,s-2}$	0	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	$a_{s,s-2}$	$a_{s,s-1}$	0
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_{s-2}	ω_{s-1}	ω_s

Butcherova tablica za **implicitnu Runge-Kuttinu metodu (IRK)**

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	\cdots	a_{2s}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	\cdots	a_{3s}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	a_{ss}
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_s

Butcherova tablica za **dijagonalno implicitnu Runge-Kuttinu metodu (DIRK)**

c_1	a_{11}						
c_2	a_{21}	a_{22}					
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}				
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\ddots		
c_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	$a_{s-1,3}$	\cdots	$a_{s-1,s-2}$	$a_{s-1,s-1}$	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	$a_{s,s-2}$	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s}$
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_{s-2}	ω_{s-1}	ω_s

Butcherova tablica za **jednako dijagonalno implicitnu Runge-Kuttinu metodu (SDIRK)** (singly diagonally implicit RK)

c_1	a						
c_2	a_{21}	a					
c_3	a_{31}	a_{32}	a				
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\ddots		
c_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	$a_{s-1,3}$	\cdots	$a_{s-1,s-2}$	a	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	$a_{s,s-2}$	$a_{s,s-1}$	a
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_{s-2}	ω_{s-1}	ω_s

Apsolutna stabilnost implicitne trapezne metode

Primjenom trapezne formule na integraciju ODJ dobije se implicitna trapezna metoda

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

Metoda je implicitna jer se y_{i+1} nalazi i na lijevoj i na desnoj strani jednačbe.

- U svakoj iteraciji rješava se gornji problem nekom od metoda za numeričko rješavanje nelinearnih jednačbi, npr. Newtonovom metodom sa fiksnim brojem iteracija.
- Pokazano je da i jednostavne iteracije konvergiraju za implicitnu RK metodu kada je h dovoljno malen (i da postoji rješenje jednačbe).
- Implicitna trapezna metoda je reda 2 jer je takva tačnost i trapezne integracijske formule.

Područje apsolutne stabilnosti.

Uvrštavamo $f(x, y) = \lambda y$ u jednačbu implicitne trapezne metode:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(\lambda y_i + \lambda y_{i+1}) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}h\lambda\right) y_i + \frac{1}{2}h\lambda y_{i+1},\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\left(1 - \frac{1}{2}h\lambda\right) y_{i+1} = \left(1 + \frac{1}{2}h\lambda\right) y_i,$$

Odnosno

$$y_{i+1} = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda} y_i.$$

Funkcija stabilnosti je

$$\varphi(z) = \frac{2+z}{2-z}.$$

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{2+z}{2-z} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |2+z| < |2-z|$$

Područje apsolutne stabilnosti je $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$

Metoda je apsolutno stabilna.

Apsolutna stabilnost implicitne Eulerove metode

Implicitna Eulerova metoda

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Područje apsolutne stabilnosti.

Uvrstimo $f(x, y) = \lambda y$ u jednačbu implicitne Eulerove metode:

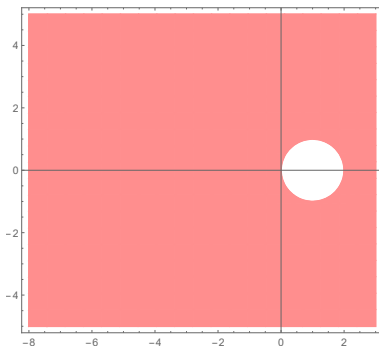
$$y_{i+1} = y_i + h \lambda y_{i+1}$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_i.$$

Funkcija stabilnosti je

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Područja apsolutne stabilnosti za implicitnu Eulerovu metodu.



Metoda je apsolutno stabilna.

Krute jednačbe (sustavi)

Implicitne metode su efikasnije za rješavanje krutih (“stiff”) jednačbi (sustava).

- Kruta jednačba (*stiff*): $\lambda < 0$ i $|\lambda| \gg 1$
- Primjenom numeričke metode na krutu jednačbu veći utjecaj na veličinu koraka h_i ima interval apsolutne stabilnosti nego uvjet na održavanje male lokalne pogreške diskretizacije.
- Takve jednačbe se teško rješavaju pomoću eksplicitnih Runge–Kutta metoda jer zahtijevaju puno vrlo sitnih koraka (kao npr. za jednačbu $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$ kada je $|\lambda|$ velik), dok za implicitnu trapeznu metodu to nije slučaj.

Primjer apsolutne stabilnosti metoda

Rješavamo inicijalni problem

$$\begin{aligned}y'(x) &= -100(y(x) - \cos x) - \sin x, \quad x \in [0, 1], \\y(0) &= 1,\end{aligned}$$

Ako napravimo transformaciju varijable:

$$z = y - \cos(x)$$

tada se gornji problem transformira u:

$$\begin{aligned}z'(x) &= -100z, \quad x \in [0, 1], \\z(0) &= 0.\end{aligned}$$

Egzaktno rješenje ovog problema je $z = 0$, a rješenje originalnog problema je $y = \cos(x)$.

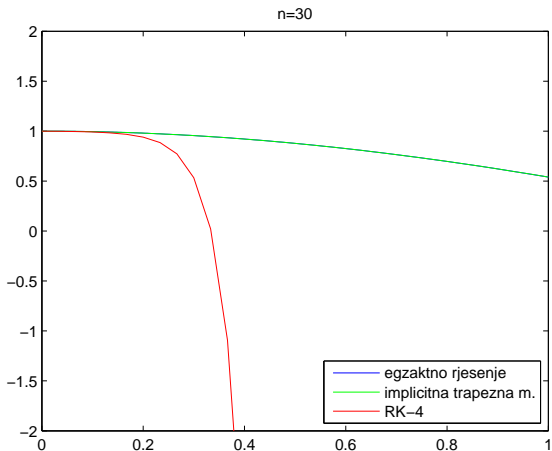
Originalni problem rješavat ćemo

- klasičnom Runge–Kutta metodom (RK-4)
- implicitnom trapeznom metodom

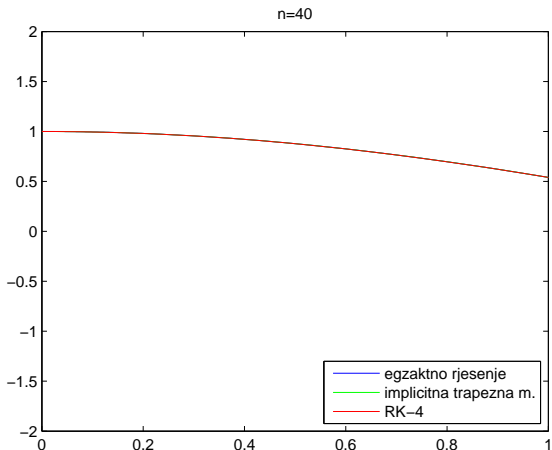
Vidimo da na transformirani problem (pa onda i na originalni) možemo primijeniti prethodna razmatranja, što znači da

- klasična Runge–Kutta metoda će biti apsolutno stabilna za $100h = 100/n < 2.78$
- implicitna trapezna metoda će biti apsolutno stabilna za sve h , odnosno n .

Sljedeće slike nam potvrđuju ove pretpostavke.



Apromksimacije dobivene RK-4 metodom i implicitnom trapeznom metodom za $n = 30$. U ovom slučaju je $100/30 = 3.33 > 2.78$ pa RK-4 nije stabilna.



Aproksimacije dobivene RK-4 metodom i implicitnom trapeznom metodom za $n = 40$. U ovom slučaju je $100/40 = 2.5 < 2.78$ pa je RK-4 stabilna.

Funkcija stabilnosti za

implicitnu Eulerovu metodu: $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$

implicitnu trapeznu metodu: $\varphi(z) = \frac{2+z}{2-z}$

Funkcija stabilnosti je racionalna funkcija.

To vrijedi za sve implicitne RK metode.

Teorem

Funkcija stabilnosti za implicitne Runge-Kuttine metode sa s stadija je racionalna funkcija

$$\varphi(z) = \frac{P_s(z)}{Q_s(z)}$$

gdje su P_s i Q_s polinomi stupnja manjeg ili jednakog od s .

Dokaz. U

$$k_i = f \left(x + c_i, y + h \sum_{i=1}^s a_{ij} k_j \right), \quad i = 1, \dots, s$$

uvrstimo test funkciju iz $y' = \lambda y$, tj. $f(x, y) = \lambda y$:

$$k_i = \lambda y + \lambda h \sum_{i=1}^s a_{ij} k_j.$$

Uvedimo vektorsku notaciju:

$$k = [k_1, \dots, k_s]^T, \quad A = [a_{ij}], \quad \mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T.$$

Jednadžba glasi

$$k = \lambda y \mathbf{1} + h \lambda A k$$

k je dan s:

$$k = \lambda y(I - h\lambda A)^{-1}\mathbf{1}$$

Označimo

$$\omega = [\omega_1, \dots, \omega_s]^T.$$

Jedan korak IRK metode je

$$\begin{aligned}y + h\Phi &= y + h \sum_{j=1}^s \omega_j k_j = y + h \langle k, \omega \rangle \\ &= y + h \langle \lambda y(I - h\lambda A)^{-1}\mathbf{1}, \omega \rangle \\ &= \left[\mathbf{1} + \lambda h \langle (I - h\lambda A)^{-1}\mathbf{1}, \omega \rangle \right] y\end{aligned}$$

Funkcija stabilnosti:

$$\varphi(z) = 1 + z \langle (I - zA)^{-1} \mathbf{1}, \omega \rangle$$

Matrica $B = (I - zA)$ na (i, j) -tom elementu je polinom 1. stupnja.

Jer je

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det B_{ij}}{\det B},$$

$\det B$ je polinom stupnja s , $\det B_{ij}$ je polinom stupnja $s - 1$

$\Rightarrow b_{ij}$ je racionalna funkcija.

Brojnik je stupnja $s - 1$ a nazivnik stupnja s .

$\langle (I - zA)^{-1} \mathbf{1}, \omega \rangle$ je također racionalna funkcija s istim stupnjem brojnika i nazivnika kao i b_{ij} .

$1 + z \langle (I - zA)^{-1} \mathbf{1}, \omega \rangle$ je racionalna funkcija.

Brojnik je stupnja s a nazivnik stupnja s .

Već smo koristili da je za metodu reda p

$$e^z = \varphi(z) + \mathcal{O}(z^{p+1}).$$

Racionalna funkcija s brojnikom i nazivnikom stupnja s koja najbolje aproksimira eksponencijalnu funkciju je **Padéov aproksimant** $[s, s]$ funkcije e^z :

$$e^z = [s, s] + \mathcal{O}(z^{2s+1}).$$

Odavdje možemo zaključiti:

- Najveći mogući red IRK metode sa s stadija je $2s$.
- Ukoliko je red IRK metode $2s$ onda je njezina funkcija stabilnosti Padéov aproksimant $[s, s]$ funkcije e^z .

Teorem

Ako je funkcija stabilnosti jednokoračne metode Padéov aproksimant $[n, n]$ funkcije e^z ili Padéov aproksimant $[n, n + 1]$ funkcije e^z , $n = 0, 1, 2, \dots$ tada je metoda A-stabilna.

Teorem (Butcher 1964, Ehle 1968)

Gaussova metoda sa s stadija je reda $2s$. Njezina funkcija stabilnosti je Padéov aproksimant $[s, s]$ i metoda je A-stabilna.

Napomena. Red metode direktno slijedi iz reda Gauss-Legendreovih integracijskih formula.

Pokazali smo da ako je red $2s$ da funkcija stabilnosti mora biti $[s, s]$.

A-stabilnost slijedi iz teorema.

Teorem

Radauove metode sa s stadija tipa IA i IIA su reda $2s - 1$. Njihova funkcija stabilnosti je Padéov aproksimant $[s - 1, s]$ i obje metode su A-stabilne.

Napomena.

Radau IA - $c_0 = 0$.

Radau IIA - $c_s = 1$.

Teorem

Lobattove metode sa s stadija tipa IIIA, IIIB i IIIC su reda $2s - 2$. Funkcija stabilnosti za IIIA i IIIB metodu je Padéov aproksimant $[s - 1, s - 1]$. Funkcija stabilnosti za IIIC metodu je Padéov aproksimant $[s - 2, s]$. Sve tri metode su A-stabilne.

Napomena.

Lobatto: $c_0 = 0$ i $c_s = 1$

Lobatto IIIA - $a_{1j} = 0$. Prvi redak u Butcherovoj tablici je 0. ($k_1 = f(x, y)$ je eksplicitno zadan)

Lobatto IIIB - $a_{is} = 0$. Zadnji stupac u Butcherovoj tablici je 0. (k_s je eksplicitno zadan)

Lobatto IIIC - $a_{ij} \neq 0$.